# РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ВАРИАНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ

**Павел П. Антосяк**

***Аннотация:*** *В работе представлены результаты экспериментальных исследований эффективности процедур последовательного анализа вариантов для задачи линейного упорядочения альтернатив. Тестирование проводилось на реальных наборах данных (экономические таблицы «затраты–выпуск» ряда европейских стран) и случайных наборах данных, полученных на основании равномерного распределения. Реализован сравнительный анализ с некоторыми приближенными алгоритмами.*

***Ключевые слова:*** *задача линейного упорядочения альтернатив, последовательный анализ вариантов.*

***ACM Classification Keywords:*** *H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

## Вступление

Задача линейного упорядочения альтернатив (ЗЛУА) – это NP-сложная задача комбинаторной оптимизации с широким применением в области коллективного принятия решений, планирования, экономики и бизнеса [Reinelt, 1985]. Эту задачу можно сформулировать следующим образом. Каждая перестановка $p = (p_1,...,p_{n_A}) \in \Omega$ однозначно определяет некоторое линейное упорядочение множества альтернатив $A = \{a_1,...,a_{n_A}\}$. Пусть $e_{ij}$ – цена размещения альтернативы $a_i$ перед альтернативой $a_j$ в линейном порядке, $\forall\ i, j \in \{1,...,n_A\}$, $i \neq j$. ЗЛУА состоит в нахождении такой перестановки $p^*$, при которой достигается максимальная суммарная цена, т.е.

$$\textit{найти}\ p^* \in Arg \max_{p\in\Omega} \left\{ E(p) = \sum_{i=1}^{n_A-1} \sum_{j=i+1}^{n_A} e_{p_i p_j} \right\}. \qquad (1)$$

Для задачи (1) разработан подход, который состоит в последовательном сужении множества возможных позиций альтернатив в оптимальных перестановках, которые являются решениями ЗЛУА [Антосяк, 2008a]. Для такой постановки ЗЛУА также построены последовательные процедуры, которые дают возможность зафиксировать факт преимущества одной альтернативы над другой в порядке преимуществ, который соответствует оптимальному решению ЗЛУА.

Для ЗЛУА в эквивалентной постановке задачи булева программирования путем анализа работы процедуры $W$, которая является основой схем последовательного анализа и отсеивание вариантов без пошагового конструирования вариантов ([Михалевич, 1965][Волошин, 1978]) для задач дискретной оптимизации, получено адаптированную для ЗЛУА процедуру $W$ [Антосяк, 2009].

Рассмотрена возможность декомпозиции ЗЛУА: сведения начальной задачи к решению нескольких однотипных задач меньшей размерности [Антосяк, 2008b].

Упомянутые подходы легли в основу алгоритма последовательного анализа вариантов для ЗЛУА. С целью изучения эффективности разработанных автором процедур и алгоритма последовательного анализа вариантов была осуществлена их программная реализация на языке Object Pascal в среде программирования Delphi 7. Все эксперименты проводились на ПЭОМ с процессором Intel Pentium Dual Core (2x1.86 GHz) и оперативной памятью объемом 1 GB. Реализовано две группы экспериментов. В первой группе изучена работа алгоритма последовательного анализа вариантов на тестовом наборе задач, которые используются разными исследователями этой проблемы. Вторая группа экспериментов предусматривала изучение вопроса относительно целесообразности использования процедур последовательного анализа для некоторых задач коллективного принятия решений, которые сводятся к ЗЛУА [Антосяк, 2010].

## Тестовые наборы задач линейного упорядочения альтернатив и их характеристика

Рассмотрим наборы тестовых задач (обозначим LOLIB), которые, как правило, используются исследователями в этой области для проведения вычислительных экспериментов. Дадим короткое описание источника и характеристику групп тестовых примеров [LOLIB].

**Input/Output таблицы (I/O)**. Это хорошо известное множество примеров (содержит 49 реальных задач линейного упорядочения), которое сформировано из экономических таблиц «затраты-выпуск» некоторых европейских стран. Все они “относительно” просты для современных метаэвристик и для них уже известны оптимальные решения.

**Набор данных SGB**. Это примеры, которые взяты из стенфордской графической базы (Stanford GraphBase) и есть матрицами «затраты-выпуск» секторов экономики Соединенных Штатов. Набор состоит из 25 тестовых примеров с 75 секторами каждый.

**Случайным образом сгенерированные примеры типа А**. Это множество из 175 задач, которое широко используется учеными для экспериментов. Задачи первого типа (RandomA1) сгенерированы из значений промежутка [0,100] на основе равномерного распределения. Этот тип задач предложен Райнелтом и сгенерирован Кампосом. Впервые такого рода примеры были сформированы на основе равномерного распределения на промежутке [0,25000] Лагуной. Позднее эти задачи испытали модификацию: были проведены сужения промежутка выбора возможных значений матрицы цен к [0,100], в связи со сложностью нахождения решения, и это множество содержало 75 примеров, по 25 для значений $n_A = 100, 150, 200$. На сегодня эта база содержит 100 тестовых примеров (сюда было включено еще 25 задач размерности $n_A = 250$). Задачи типа 2 (RandomA2) генерируются на основе подсчета числа появления секторов в позиции высшей, чем другие, во множестве случайно сгенерированных перестановок. Этот тип задач был предложен Ханасом и Кобылянским [Chanas, 1996] и сгенерирован Кампосом. Для задач размерности $n_A$, генерируется $n_A/2$ перестановок. Этот набор тестовых задач содержит по 25 примеров для каждой из размерности 100, 150, 200.

**Случайные данные типа B**. Для этих задач (RandomB) наддиагональные элементы матрицы цен выбираются случайным образом (на основании равномерного распределения) из интервала $[0, U_1]$, а те элементы, которые лежат ниже главной диагонали, – из промежутка $[0, U_2]$, где $U_1 \geq eU_2$.

**Набор Митчела и Борхерса** впервые использован этими авторами в их вычислительных экспериментах. Набор составляют случайные матрицы, элементы которых, лежащие ниже главной диагонали, равномерно распределенные на промежутке [0,99], а те, которые лежат выше главной диагонали на промежутке [0,39]. Кроме этого, каждый пример имеет определенный точный процент нулевых элементов.

**Набор Шиавинотто**. Не так давно в работе [Schiavinotto, 2004] были предложены и использованы следующие тестовые задачи. Они генерируются на основе реальных таблиц «затраты-выпуск» путем их определенного дублирования. Набор данных (называемый XLOLIB) содержит задачи размерностей 150 и 250. Для каждой оригинальной таблицы генерируются две новые, т.е. на основе набора I/O получаем 98 примеров (49 размерности 150 и 49 размерности 250). На сегодня из набора XLOLIB изъято 20 задач, в связи со сложностью представления больших целочисленных значений.

**Другие примеры**. Обозначим эту базу задач через SPEC и отметим, что в нее входят примеры, которые используются некоторыми авторами в их вычислительных экспериментах. Примеры в файлах с префиксом *econ* сгенерированны из экономической таблицы «затраты-выпуск» *usa79*. Примеры в файлах с префиксом *atp* созданы на основе результатов ATP теннисных турниров 1993–1994 лет.

## Эффективность процедур последовательного анализа вариантов на тестовых наборах данных LOLIB

Результат работы процедур фиксации для тестового набора I/O представлен на рис. 1, на котором указан процент зафиксированных значений в подмножествах возможных вариантов.

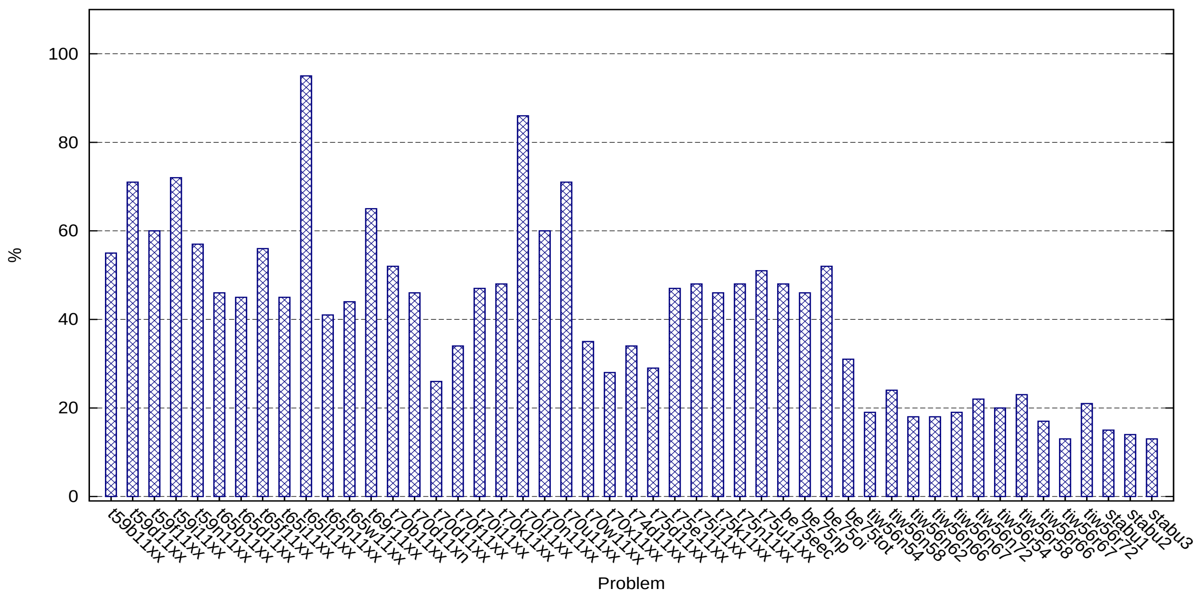


**Рисунок 1**: Результат работы процедуры фиксации отношений на тестовом наборе данных I/O

Применение процедуры $W$ к сокращенному множеству допустимых вариантов для всех задач не требовало возмущения и давало единственный вариант решения. В десяти случаях найденный вариант оказался оптимальным. Получены результаты лучшие от результатов мультистартового алгоритма

Ханаса и Кобылянского (использовалось 25 случайных начальных решений) [Chanas, 1996]. Соответствующие значения целевых функций приведены в табл. 1.

| | Название задачи | | | |
|---|---|---|---|---|
| | t9b11xx | t9n11xx | t0f11xx | t0l11xx |
| $E_{CK}$ | 245360 | 25190 | 412882 | 28102 |
| $E_{SA}$ | 245385 | 25209 | 413487 | 28107 |

**Таблица 1**: Значение целевых функций на вариантах, найденных по алгоритму Ханаса-Кобылянского ($E_{CK}$) и по последовательному алгоритму ($E_{SA}$)

Сравнение результатов работы последовательного алгоритма (SA) с результатами эвристических алгоритмов для ЗЛУА можно сделать на основе данных табл. 2. В эту таблицу сведено среднее отклонение (в процентах) наилучших значений, найденных по соответствующим алгоритмам, от наилучших значений для тестовых наборов, которые известные в настоящее время. Рассмотрены наборы данных SGB, MB, IO и следующие эвристические алгоритмы: алгоритм локального поиска, который базируется на вставках (LSi); частные случаи 2-opt, 3-opt известного метода k-opt; алгоритм локального поиска, который базируется на обменах (LSe); две вариации алгоритма Кернигана и Лина (KL1 и KL2); алгоритм локального перебора (LE).

| | SA | Lsi | 2-opt | 3-opt | LSe | KL1 | KL2 | LE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SGB | 0,53 | 0,16 | 0,81 | 0,53 | 1,35 | 0,63 | 0,28 | 1,09 |
| MB | 0,17 | 0,02 | 0,57 | 0,14 | 3,1 | 0,4 | 0,01 | 0,17 |
| I/O | 0,73 | 1,08 | 0,64 | 0,23 | 1,73 | 1,35 | 4,24 | 0.01 |

**Таблица 2**: Относительная погрешность результатов работы алгоритмов на наборах данных SGB, MB, I/O

На других тестовых наборах данных последовательный алгоритм нуждался в значительном количестве возмущений и затрат машинного времени при нахождении решений, которые оказывались локально-оптимальными и уступали по точности решениям, найденным с помощью современных метаэвристических алгоритмов [Garcia, 2006][Glover, 2001][Laguna, 1999].

## Эффективность процедур последовательного анализа вариантов на тестовом наборе данных порожденном профилями индивидуальных предпочтений

С целью исследования эффективности разработанных процедур для решения задач в области коллективного принятия решений, которые сводятся к ЗЛУА, было проведено экспериментальное исследование процедур последовательного анализа на соответствующем наборе данных (RandomC). Для каждой из розмерностей $n_A = 3,4,\ldots,50$ случайным образом (на основании равномерного распределения) было сгенерировано по 100 профилей индивидуальных предпочтений. Количество экспертов изменялось от 10 до 20. Результаты работы процедуры фиксации для такого набора задач изображены на рис. 2.

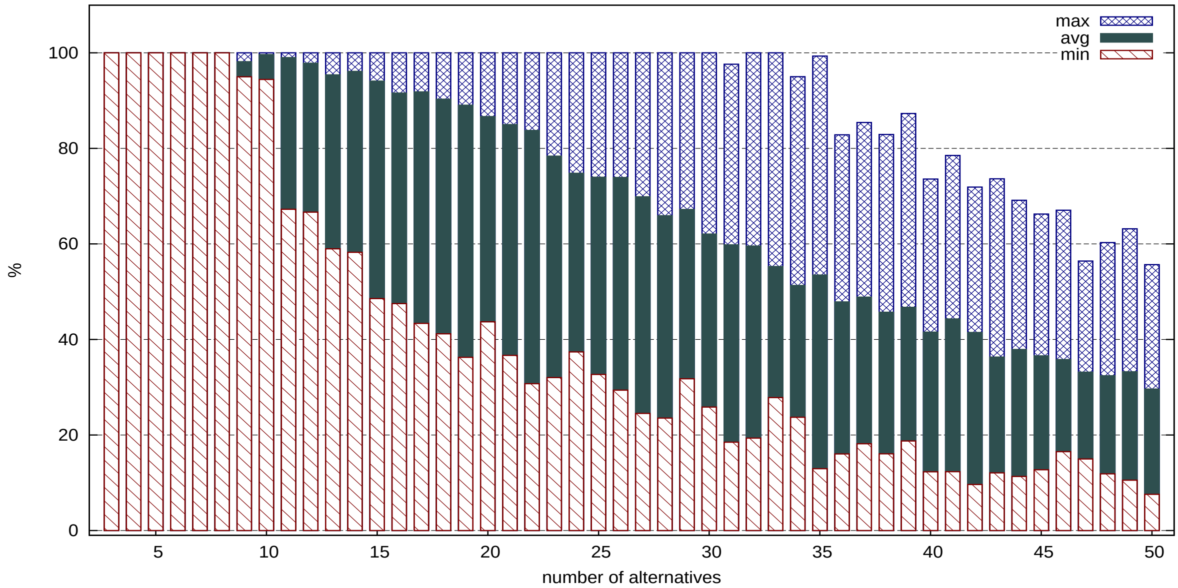


**Рисунок 2**: Результат работы процедур фиксации отношений на тестовом наборе данных RandomC: max – максимальный процент зафиксированных значений; avg – количество в процентах в среднем зафиксированных значений; min – минимальный процент зафиксированных значений

Для набора RandomC также исследована эффективность декомпозиционных процедур, результат применения которых изображено на рис. 3.

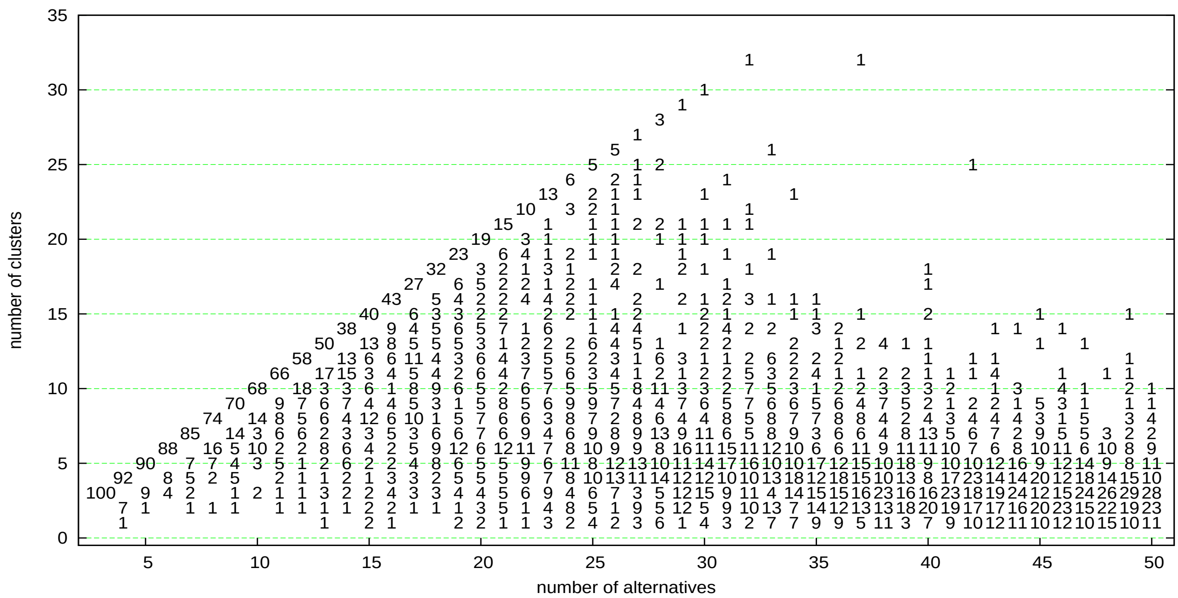


**Рисунок 3**: Результат работы декомпозиционных процедур на тестовом наборе данных RandomC: число изображенное в точке с координатами ($n_A$,$n_C$) соответствует количеству задач размерности $n_A$, которые в результате использования процедур были сведены к решению $n_C$ подзадач меньшей размерности

## Выводы

Анализ результатов показывает, что для отдельных наборов задач тестового набора LOLIB алгоритм последовательного анализа дает возможность получать решения большей точности по сравнению с известными эвристическими алгоритмами. Для других тестовых наборов данных процедура *W* требовала значительного количества возмущений, которое отрицательно влияло на качество решения.

Наилучшие результаты для процедур фиксации и декомпозиции получены для реальных задач, а также задач, к которым сводится задача отыскания строгой медианы Кемени. Как показывают результаты экспериментов, использование процедур фиксации целесообразно для задач с количеством альтернатив, которая не превышает 35. Именно рассмотрением таких задач ограничиваются соответствующие экспертизы. Более того, эффективность процедур фиксации и декомпозиционных процедур возрастает с увеличением согласованности мнений экспертов.

Процедуры последовательного анализа могут быть использованы для сокращения размерности задачи нахождения строгой медианы Кемени, с дальнейшим применением на сокращенном множестве точных методов (алгоритмов отсечений, ветвей и границ [Reinelt, 1985][Grotschel, 1984]) либо приближенных методов (в частности, метода вектора спада [Антосяк, 2006]).

## Библиография


[Антосяк, 2006] Антосяк П.П. Алгоритм побудови колективного ранжування на основі методу вектора спаду / П.П. Антосяк // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – №4. – С. 145–147.

[Антосяк, 2008a] Антосяк П.П. Локалізація інтервалів зміни оптимальних рангів об'єктів у задачі знаходження медіани Кемені-Снелла / П.П. Антосяк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика – 2008. – №8. – С. 4–7.

[Антосяк, 2008b] Антосяк П.П. Декомпозиційні процедури у задачі знаходження строгого результуючого ранжування у вигляді медіани Кемені-Снелла / П.П. Антосяк // Науковий вісник Ужгородського університету. – 2008. – Вип. 17. – С. 27–35.

[Антосяк, 2009] Антосяк П.П. Алгоритм послідовного аналізу та відсіювання варіантів для задачі лінійного впорядкування альтернатив / П.П. Антосяк // Науковий вісник Ужгородського університету. – 2009. – Вип. 18. – С. 4–8.

[Антосяк, 2010] Антосяк П.П. Узагальнення медіанного підходу на випадок нечітких індивідуальних переваг / П.П. Антосяк // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – №2. – С. 81-86.

[Волошин, 1978] Волкович В.Л. Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов / В.Л. Волкович, А.Ф. Волошин // Кибернетика. – 1978. – №4. – С. 98-105.

[Михалевич, 1965] Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I. II / В.С Михалевич // Кибернетика. – 1965. – №1. – С. 45-55; – №2. – С. 85-88.

[Chanas, 1996] Chanas S. A new heuristic algorithm solving the linear ordering problem / S. Chanas, P. Kobylanski // Computational Optimization and Applications. – 1996. – Vol. 6. – P. 191-205.

[Garcia, 2006] Variable neighborhood search for the linear ordering problem / [Carlos G. Garcia, Dionisio Perez-Brito, Vicente Campos, Rafael Marti] // Computers & Operations Research. – 2006. – Vol. 33. – P. 3549--3565.

[Glover, 2001] An experimental evaluation of a scatter search for the linear ordering problem / [V. Campos, F. Glover, M. Laguna, R. Marti] // Journal of Global Optimization. – 2001. – Vol. 21. – №4. – P. 397-414.

[Grotschel, 1984] Grotschel M. A cutting plane algorithm for the linear ordering problem / M. Grotschel, M. Jünger, G. Reinelt // Operations Research. – 1984. – vol. 2. – №6. – P. 1195-1220.

[Laguna, 1999] Laguna M. Intensification and diversification with elite tabu search solutions for the linear ordering problem / M. Laguna, R. Marti, V. Campos // Computers & Operations Research. –1999. – Vol. 26. – P. 1217-1230.

[LOLIB] http://www.optsicom.es/lolib/.

[Reinelt, 1985] Reinelt G. The linear ordering problem: algorithms and applications. Research and Exposition in Mathematics. – Berlin, Germany: Heldermann Verlag, 1985.

[Schiavinotto, 2004] Schiavinotto T. The linear ordering problem: Instances, search space analysis and algorithms / T. Schiavinotto, T. Stützle // Journal of Mathematical Modelling and algorithms – 2004. – Vol. 3. – P. 367–402.


## Информация об авторе


***Антосяк Павел Павлович*** *– Ассистент, Ужгородский национальный университет, математический факультет. Ужгород, Украина. E-mail: antosp@ukr.net*


*Основные области научных исследований: коллективное принятие решений, методы дискретной оптимизации, «мягкие» вычисления.*