СИНТЕЗ И АНАЛИЗ ДИОФАНТОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОГРАММНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Адиль Тимофеев

Аннотация: *Рассматриваются методы синтеза и анализа стабилизирующих и модальных регуляторов систем управления программным движением с обратимой (на подпространстве) динамикой. Значительное внимание уделяется исследованию и расчёту параметров декомпозирующих и диофантовых регуляторов с помощью диаграмм Вышнеградского и их обобщений.*

Keywords: *системы управлении программным движением, стабилизирующие и диофантовые регуляторы, методы синтеза и анализа, диаграммы Вышнеградского*

ACM Classification Keywords: *H.1.1 Systems and Information Theory*

Введение

Современная теория автоматического управления нелинейными объектами тесно связана с информационными и когнитивными технологиями. Эта связь особенно важна в таких прикладных областях, как робототехника, мехатроника и аэрокосмические системы [1–7]. При этом информационные и когнитивные технологии полезны как на этапе автоматизированного проектирования (синтез, анализ, имитационное моделирование) систем автоматического управления, так и на этапе их программно-аппаратной реализации на современной микропроцессорной базе (цифровые сигнальные процессоры, многоядерные процессоры, нейропроцессоры и т.п.).

Эффективность управления сложными многомерными объектами (роботы, беспилотные летательные и подводные аппараты, планетоходы и т.д.) оценивается по многим показателям качества. К ним прежде всего относятся высокая точность и быстродействие, асимптотические и техническая устойчивость, робастность и адаптивность в нечётких и неопределённых условиях эксплуатации.

В настоящее время теория автоматического (в том числе оптимального) управления линейными динамическими объектами разработана почти исчерпывающим образом. В рамках этой теории синтез регуляторов по заданному расположению корней характеристического полинома замкнутой системы, т.е. по ее спектру, позволяет обеспечить не только асимптотическую устойчивость, но и заданные показатели качества переходных процессов (ПП).

Идея спектрального анализа и синтеза была предложена в 1876 г. И.А. Вышнеградским применительно к задаче о центробежном регуляторе паровой машины [1]. В дальнейшем эта идея была развита в теории модальных регуляторов многомерных линейных и линеаризованных систем.

В работах [2–6] были предложены спектральные методы синтеза, оптимизации и анализа нелинейных многомерных регуляторов обратимых динамических систем (ОДС), а также критерии глобальной управляемости, обратимости, декомпозируемости и стабилизируемости ОДС. В [2–6] были получены также аналитический вид и расчетные формулы для синтеза нелинейных спектральных регуляторов.

В настоящей работе рассматривается новый класс диофантовых регуляторов и приводятся соотношения, связывающие их целочисленные параметры с целочисленными корнями характеристического полинома уравнения ПП. При этом существенно используются информационные технологиями и когнитивная графика, основанные на диаграммах Вышнеградского и их модификациях.

1. Архитектура систем управления программным движением

Во многих случаях глобальную задачу автоматического управления многомерными линейными и нелинейными объектами можно декомпозировать на две взаимосвязанные локальные задачи [2–7]:

1. задача построения и оптимизации программных движений (ПД);

2. задача синтеза, анализа и оптимизации регуляторов переходных процессов (ПП).

Методы решения первой локальной задачи позволяют построить в аналитическом виде ПД, обеспечивающее достижение цели движения с учётом конструктивных и динамических ограничений. Это ПД может быть оптимизировано при заданном показателе (функционале) качества. Некоторые методы и алгоритмы построения и оптимизации ПД описаны в работах [2–6]. В ряде случаев (например, в мобильной робототехнике) они связаны с методами навигации и маршрутизации [7–9].

Принципы решения второй локальной задачи направлены на синтез (в аналитическом виде), системный анализ и оптимизацию регуляторов ПП. Важную роль при этом играют математическое и имитационное моделирование поведения замкнутой системы автоматического управления. Эти принципы могут быть реализованы с помощью методов и алгоритмов, предложенных в работах [2–6], а также на основе диаграмм Вышнеградского и их модификаций.

Математическое и программное обеспечение решения первой и второй локальной задачи в сочетании с современными информационными технологиями и когнитивной графикой являются основой для автоматизированного проектирования и мультимикропроцессорной реализации современных и перспективных систем управления программным движением.

Архитектура таких систем включается в себя две подсистемы, а именно [2–7]:

– программатор движений;

– регулятор переходных процессов.

Программатор движений представляет собой аппаратно-программный комплекс, обеспечивающий построение и оптимизацию ПД.

Регулятор ПП также реализуется в виде аппаратно-программного комплекса (например, на базе PLD или DSP), обеспечивающего осуществление ПД с заданными показателями качества [2–7].

2. Динамика, обратимость и управляемость

Динамика широкого класса механических и мехатронных систем, роботов, космических и подводных аппаратов описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$A(y, y^{/}, ..., y^{(r-1)}\ , \xi) y^{(r)} + b(y, y^{/}, ..., y^{(r-1)}\ , \xi) + \pi = u, t \geq t_0, \tag{1}$$

где y –m-мерный управляемых координат, y(r) - его r-я производная по времени t, u – m-мерный вектор управлений, ξ - p-мерный вектор варьируемых параметров, A(·), b(·) – заданные матричная и векторная функции размерности т×m и т, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения уравнения (1) при заданных u, ξ, начальных данных

$$y(t_0) = x_1(t_0), ..., y^{(r-1)}(t_0) = x_{r-1}(t_0) \tag{2}$$

и измеряемых или неконтролируемых внешних возмущениях $\pi = \pi(t)$.

Критерием обратимости систем вида (1) является невырожденность матрицы A(-) при всех допустимых значениях аргументов. Этим свойством обладают многие объекты управления (в частности, механические и электромеханические системы, мехатронные системы и роботы) [2, 3]).

Введём вектор состояний канонического вида

$$x = \left| x_i \right|_{i=1}^{r}, \dot{x}_i = x_{i+1}, x_1 = y, n = rm. \tag{3}$$

Тогда систему (1), (2) можно записать в форме Коши

$$\dot{x} = F(x, u, \xi, \pi), x(t_0) = x, t \geq t_0. \tag{4}$$

Эта система имеет порядок п = r m, причём

$$F(x, u, \xi, \pi) = \left| x_1, x_2, ..., w \right|^T, \tag{5}$$

где $w = A^{-1}(x, \xi)(u - b(x, \xi) - \pi)$.

В работах [2–4] показано, что система (4), (5) разрешима относительно u в виде (1), т.е. является ОДС на некотором подпространстве.

Представим систему (4), (5) в канонической форме

$$\dot{x} = Px + Qw, x(t_0) = x_0, t \geq t_0,$$
$$P = \begin{bmatrix} 0_m^{n-m} & I_{n-m} \\ 0_m^m & 0_{n-m}^m \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0_m^{n-m} \\ I_m \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Здесь P и Q - блочные матрицы, $0_\alpha^\beta = I_\alpha$ – нулевая и единичная матрицы размерности α×β и α× α

Система (6) глобально управляема по w, так как для нее справедлив критерий Калмана

$$rank\ (Q, PQ, ..., P^{r-1}Q) = n. \tag{7}$$

Следовательно, существует такой канонический регулятор w = w(t), что движение замкнутой им системы (6) удовлетворяет граничным условиям

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_T) = x_T,\ T = t_T - t_0 < \infty. \tag{8}$$

Поскольку w связано с u взаимно однозначным преобразованием (5), то из (7) следует управляемость для исходной ОДС (1).

3. Синтез программных и стабилизирующих регуляторов

Обозначим через $x = x_p(t)$ допустимое решение (4), (5) при π = 0, удовлетворяющее граничным условиям (8), Назовём его программным движением (ПД).

Подставляя ПД в (1) при π = О получим в аналитическом виде программный регулятор

$$u(t) = A(x_p, \xi)x_{1,p}^{(r)} + b(x_p, \xi) \tag{9}$$

и регулятор с обратной связью по вектору состояний

$$u(t, x) = A(x, \xi)x_{1,p}^{(r)} + b(x, \xi) \tag{10}$$

Регуляторы (9) и (10) обеспечивают осуществление ПД в замкнутой системе в силу единственности решения (1) при начальном условии $x_p(t_0) = x_0$ и известном (или измеряемом) законе изменения параметров $\xi = \xi(t)$ и $\pi = 0$. Поэтому нестационарная нелинейная ОДС (1), замкнутая (10) является программно управляемой.

Программный регулятор (9) является решением обратной задачи динамики (1), впервые поставленной и решённой И.Ньютоном для случая r=2 в задаче о динамике планет , а регулятор с обратной связью (10) синтезирован по принципу программного регулирования старшей производной (ускорением) уравнения движения (1) для случая r=2, предложенному Г.С.Поспеловым в задаче о самонастраивающемся автопилоте.

Управляемость ОДС гарантирует существование стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость ПД. Для синтеза таких регуляторов воспользуемся принципом скоростного управления ПД, предложенным в работах [2-6]. Согласно этому принципу сначала сконструируем эталонное дифференциальное управление переходных процессов (ПП) вида

$$e^{(r)} = \varphi(e, \dot{e}, ..., e^{(r-1)}, t),\ e^{(i)}(t_0) = e_0^{(i)}, \tag{11}$$

где e = y – yp = x1 – x1,p = e1 ,e(i)(t) – i-я производная e по t, i=0,1,…r-1, φ (·) – m-вектор-функция, удовлетворяющая условиям асимптотической устойчивости тривиального решения e(t)=0. Обозначив E=x-xp, получим из (1.3), (2.1) эталонное уравнение ПП

$$\dot{E} = \Phi(E, t),\ E(t_0) = \left| e_0^{(i)} \right|_{i=0}^{r-1},$$

$$\Phi(E, t) = \left[e, e, ..., \varphi \right]^T, E(t_0) = \left| e_0^{(i)} \right|_{i=0}^{r-1}, \tag{12}$$

причём $\Phi(0, t)$ = 0 и существуют такие числа c>0 и γ c>0, что для любого решения (2) справедлива экспоненциальная оценка

$$\|E(t)\| \le c\exp(-\gamma(t-t_0))\|E(t_0)\|,\ t \ge t_0\ . \tag{13}$$

На втором этапе синтезируем нелинейный стабилизирующий регулятор из условия

$$\dot{x}_p + \Phi(E,t) = F(E + x_p, u, \xi). \tag{14}$$

Используя свойство обратимости, получим искомый нелинейный стабилизирующий регулятор в аналитическом виде

$$u = A(E + x_p, \xi)(x_{1,p}^{(r)} + \Phi(E,t)) + b(E + x_p, \xi). \tag{15}$$

Подставляя (2,5) в (1,1), убеждаемся, что ПП в замкнутой системе удовлетворяют эталонному уравнению (2,1) при π = 0. Следовательно, ПД будет асимптотически устойчивым.

На практике важен случай, когда

$$\varphi = -\Gamma_{r-1}e^{(r-1)} - ... - \Gamma_1\dot{e} - \Gamma_0 e, \tag{16}$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i(t),\ i = 0,1,...,r-1,$ – варьируемые m×m матричные параметры, определяющие характер ПП. Тогда регулятор (15), (16) будет стабилизирующим, если блочная матрица Фробениуса размерности пхп

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{r-1} \end{vmatrix},\ \mathrm{Re}\,\lambda_j(\Gamma) < 0, \tag{17}$$

j=1,…,n.

гурвицева. Здесь λj – собственные числа матрицы Г, определяющие спектр замкнутой ОДС. В этом случае ПП удовлетворяют при π= 0 экспоненциальной оценке (13), где $\gamma = \max_j \lambda_j(\Gamma)$.

4. Декомпозирующие регуляторы и диаграммы Вышнеградского

Многомерным ОДС присущи нелинейные перекрестные связи, интенсивность которых зависит от текущего состояния. Будем называть регулятор декомпозирующим [2-5], если уравнения ПП в замкнутой ОДС (1) распадаются на систему независимых скалярных уравнений по всем управляемым координатам.

Критерием декомпозируемости регулятора (15) при π = 0 является диагональность матричных коэффициентов усиления, т.е.

$$\Gamma_i(t) = diag(\gamma_i(t))_{i=1}^m,\ i = 0,1,...,r-1. \tag{18}$$

В этом случае уравнение ПП в замкнутой ОДС имеет вид

$$e_j^{(r)} = -\sum_{i=0}^{r-1}\gamma_{ij}e_j^{(i)},\ j = 1,....,m,$$

Следовательно, декомпозирующий регулятор (15) полностью компенсирует (развязывает) перекрестные связи и исключает их динамическое взаимовлияние в процессе стабилизации ПД. При этом значительно облегчается расчет параметров регулятора (15) по сданным показателям качества ПП.

Общий вид и показатели качества ПП в замкнутой ОДС (1), (15), (16) целиком определяются спектром матрицы Г. Впервые на эту связь обратил внимание И.А. Вышнеградский [1]. Он предложил метод анализа качества регуляторов одномерных линейных систем порядка п = 3 в пространстве параметров v1 v2 нормированного полинома

$$p(q) = q^3 + v_2 q^3 + v_1 q + 1 = \prod_{i=1}^{3} (q - q_{ij}), \tag{19}$$

построив для этого диаграмму, представляющую собой исчерпывающую картину неустойчивости, устойчивости и качества ПП.

Декомпозирующие регуляторы (15)–(17) обобщают этот метод на широком классе многомерных линейных и нелинейных ОДС порядка п = 3m. Поэтому будем называть их обобщёнными регуляторами Вышнеградского.

Достоинствами диаграмм Вышнеградского являются наглядность, информативность и простота их использования для синтеза стабилизирующих и модальных результатов с наперёд заданными показателями качества и анализа ПП в замкнутых ОДС. Кроме того, они удобны для автоматизации проектирования линейных и нелинейных регуляторов, так как могут быть представлены средствами компьютерной "когнитивной графики" и дополнены "экспертными правилами" синтеза, оптимизации и анализа. Это позволило создать экспертную систему проектирования и реализации высококачественных регуляторов нелинейных ОДС порядка п ≥ 3т [3,6].

Расчет параметров стабилизирующего регулятора осуществляется наведением курсора в область над гиперболой v1v2 > 1, v1 > 0, v2 > 0.

Задание апериодического, монотонного или колебательного ПП производится наведением курсора в областях Da, Dm или Dk, которым соответствуют различные варианты расположения корней полинома (19). Для обеспечения наибольшей "степени устойчивости", связанной с робастностью ОДС, достаточно навести курсор в точку v{ = v2 = 3 на пересечении границ областей Da и Dm, что соответствует корням qj = -1 или $i = 1,2,3$.

Априорный и сравнительный анализ нелинейных регуляторов Вышнеградского сводится к подстановке их параметров в формулы

$$\gamma_1 = v_1 - \sqrt[3]{\gamma_0}, \gamma_2 = v_2 - \sqrt[3]{\gamma_0} \; i = 1,\ldots,m, \tag{20}$$

и определению области диаграммы, куда попала точка vj, v2.

Этот метод применим также для синтеза и анализа нелинейного аналога m-мерного ПИД-регулятора вида [3].

$$u = A(x.\xi)\left[\ddot{x}_{1p} - \Gamma_1\dot{e} - \Gamma_0 e - \Gamma_* \int_{t_0}^{t} e(s)ds)\right] + b(x,\xi),\; x = \left|y_i\right|_{i=1}^{2}. \tag{21}$$

Регуляторы, обеспечивающие заданное расположение корней замкнутой системы, принято называть модальными. К ним относятся регуляторы Вышнеградского и регуляторы общего вида (15–17). Однако представляется более обоснованным называть их спектральными, поскольку параметры этих регуляторов однозначно определяются по спектру матрицы Г. Если этот спектр удовлетворяет условиям (17), (18), то регуляторы являются стабилизирующими и декомпозирующими, а тип (характер) ПП целиком определяется расположением корней $\lambda_i(\Gamma),\; j = 1,\ldots,n$ слева от мнимой оси.

Для упрощения расчетов и удобства цифровой реализации спектральных регуляторов (15), (17) потребуем, чтобы их параметры и соответствующие корни характеристических полиномов уравнения ПП (16) были целыми числами. Такие регуляторы будем называть диофантовыми.

Для вычисления корней по параметрам регулятора в случае r = 3 и r = 4 можно воспользоваться формулами Кардано и Феррари. Расположение целочисленных корней определяется неравенствами

$$1 \le \lambda_i < 1+\omega, i = 1,\ldots r, \\ \omega = \max(|\gamma_0|,\ldots,|\gamma_{r-1}|). \tag{22}$$

Параметры диофантовых регуляторов связаны неравенствами Гюа

$$q_{ij} \equiv \gamma_{ij}^2(\gamma_{i-1,j}, \gamma_{i+1,j})^{-1} > 1, \qquad i = 1,\ldots r-1. \tag{23}$$

Величины q_{ij} особенно удобны для задания характера и показателей качества ПП, так как они безразмерны и инвариантны по отношению к умножению полиномов на произвольное число. Критерий апериодичности ПП при использовании диофантова регулятора (15) задаётся неравенствами

$$q_{ij} \ge 4, \qquad i = 1,\ldots r-1, \quad j-1,\ldots m. \tag{24}$$

Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости ПД для декомпозирующих диофантовых регуляторов общего вида определяется неравенствами

$$\gamma_{ij} \ge 1, \sum_{k=1}^{2} s_{k+1,j} < 1, k = 1,\ldots,r-4, \\ s_{kj} = \gamma_{k-1,j}, \gamma_{k+2,j}(\gamma_{k,j}, \gamma_{k+1,j})^{-1}. \tag{25}$$

Заключение

Исследование робастности и синтез алгоритмов адаптации для синтезированных регуляторов с заданным спектром основываются на принципах адаптивного управления ПД. Методы синтеза и анализа робастных и адаптивных систем управления ПД рассмотрены в работах [2–7].

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 09–08–00767-а, РФФИ № 12-08-01167-а и издательского гранта РФФИ № 12-08-07022-д.

Литература

[1] Вышнеградский И.А., Максвелл Д.К., Стодола А. Теория автоматического регулирования. М.: Изд-во АН СССР, 1949. 386 с.

[2] Тимофеев А.В. Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980. 88 с.

[3] Тимофеев А.В. Управляемость, робастность и инвариантность обратимых систем с нелинейной динамикой. – Доклады АН, 1998, том 359, № 2, с. 171–174.

[4] Тимофеев А.В. Управление роботами – Л.: Изд. ЛГУ, 1985, 217 с.

[5] Тимофеев А.В. Мульти-агентное и интеллектуальное управление сложными робототехническими системами. - Юбилейный сборник "Теоретические основы и прикладные задачи интеллектуальных информационных технологий", посвященный 275-летию РАН и 20-летию СПИИ РАН–СПб.: СПИИРАН, 1999, с.71-81.

[6] Тимофеев А.В. Методы высококачественного управления, интеллектуализации и функциональной диагностики автоматических систем. – Мехатроника, автоматизация, управление, 2003. № 5.

[7] Тимофеев А.В., Юсупов Р.М. Принципы построения интегрированных систем мульти-агентной навигации и интеллектуального управления мехатронными роботами. – International Journal "Information Technologies & Knowledge" vol. 5, n. 3, 2011, pp. 237–244.

[8] Тимофеев А.В. Мульти-агентное управление коллективом роботов. – Проблемы информатизации, 2000, Выпуск 1, с. 70-77.

[9] Тимофеев А.В., Кай З., Хе Х. Навигация и управление движением роботов в неизвестной среде. – Гироскопия и навигация № 3, 2004. № 2 (45), с. 13-24.

[10] Тимофеев А.В. Мульти-агентные робототехнические системы и нейросетевые технологии. – Известия ЮФУ. Технические науки. Перспективные системы и задачи управления. 2010, №3, с. 20-23.

Сведения об авторах

Тимофеев Адиль Васильевич – заведующий лабораторией информационных технологий в управлении и робототехнике Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук, Профессор кафедры информатики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, 199178, Россия, Санкт-Петербург, 14-я линия, д. 39, СПИИРАН, tav@iias.spb.su