СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ НЕЧЁТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Владимир Ногин

***Аннотация**: Обсуждается аксиоматический подход к решению проблемы сужения множества Парето на основе нечёткой информации об отношении предпочтения ЛПР, который развивается автором на протяжении ряда лет. Применение этого подхода предполагает принятие определённых четырёх аксиом «разумного» поведения человека (ЛПР) в процессе принятия решений. Предполагается, что в дополнение к указанным аксиомам известны некоторые сведения о нечётком отношении предпочтения ЛПР. На основе этих сведений можно сократить множество Парето и, тем самым, облегчить последующий выбор наилучших решений. Рассматриваются достоинства и недостатки указанного подхода, приводится иллюстративный пример.*

***Ключевые слова**: множество Парето, многокритериальный выбор, нечёткий выбор*

***ACM Classification Keywords**: F.4.3 – Decision problems, I.2.3. – Uncertainty, “fuzzy”, and probabilistic reasoning*

Введение

При решении различных прикладных задач принятия решений информация, требуемая для построения математической модели и осуществления окончательного выбора, как правило, является довольно расплывчатой, нечёткой. Удобным математическим инструментарием, с помощью которого выражается и учитывается подобного рода информация, является теория нечётких множеств, предложенная в [Zadeh, 1965]. В частности, для описания отношения предпочтения, которым лицо, принимающее решение (ЛПР), руководствуется в процессе выбора, можно использовать понятие нечёткого бинарного отношения. Такого рода отношение больше соответствует тем реальным ситуациям принятия решений, с которыми приходится человеку сталкиваться на практике.

В работе автора [Ногин, 2003] была дана математическая формулировка и приведено аксиоматическое обоснование известного еще с XIX в. принципа Эджворта–Парето для случая нечёткого отношения предпочтения ЛПР. Этот принцип является основополагающим при выборе наилучших решений в экономике и технике в тех случаях, когда приходится учитывать сразу несколько числовых функций (критериев). Выяснилось, что он не является универсальным, а справедлив лишь при решении определенного (хотя и достаточно широкого) класса задач нечёткого многокритериального выбора. За пределами этого класса его применение рискованно или же вообще недопустимо.

Для обоснованного сужения множества Парето с целью выбора «наилучших» вариантов необходима дополнительная информация о решаемой многокритериальной задаче. В качестве такой информации здесь рассматриваются нечёткие сведения об отношении предпочтения ЛПР, которые можно выявить в результате прямого опроса ЛПР. Приводится определение так называемого «кванта нечёткой информации» об отношении предпочтения и показывается, каким образом его можно использовать для сужения множества Парето. Указывается, что учёт того или иного кванта может характеризоваться различной степенью сужения множества Парето, причём чаще всего это сужение будет содержать более одного варианта. Для высокой степени сужения рекомендуется использовать сразу несколько подобных квантов. В этом случае встаёт вопрос о непротиворечивости конечного набора квантов указанной информации. В этой связи формулируется необходимое и достаточное условие непротиворечивости произвольного конечного набора квантов нечёткой информации об отношении предпочтения. Выясняется, что в общем случае сужение множества Парето на основе произвольного набора квантов представляет сложную математическую задачу. Далее рассматривается так называемый замкнутый набор квантов нечёткой информации, для которого также формулируется критерий непротиворечивости и указывается, каким образом его можно использовать в процессе принятия решений. Изложение иллюстрируется примером. Обсуждаемый здесь подход представляет собой распространение аксиоматического подхода автора [Ногин, 2005] к сужению множества Парето на случай нечёткого отношения предпочтения.

Сведения из теории нечётких множеств

Напомним основные понятия, связанные с нечёткими множествами и нечёткими отношениями.

Пусть *A* – некоторое непустое (универсальное) множество. Нечёткое множество *X* задается своей функцией принадлежности $\lambda_X : A \to [0,1]$. При каждом $x \in A$ число $\lambda_X(x) \in [0,1]$ интерпретируется как степень принадлежности элемента *x* нечёткому множеству *X*. В частном случае, когда функция λ_X принимает на множестве *A* лишь два значения 0 или 1, она превращается в характеристическую функцию обычного (чёткого) множества *X*. Функция принадлежности пустого нечёткого множества тождественно равна нулю. Все элементы множества *A*, имеющие положительную степень принадлежности, образуют суппорт данного нечёткого множества.

Обычно включение, объединение и пересечение нечётких множеств *X* и *Y* (в терминах функций принадлежности) определяются следующим образом

$$Y \supset X \Leftrightarrow \lambda_Y(y) \geq \lambda_X(x), \qquad \lambda_{X \cup Y}(x) = \max\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\}, \quad \lambda_{X \cap Y}(x) = \min\{\lambda_X(x); \lambda_Y(x)\}$$

для всех $x \in A$.

Для нечёткого множества $\eta(\cdot)$, заданного на линейном пространстве *L*, используют такие термины:

- *нечёткий конус*, если равенство $\eta(x) = \eta(\alpha \cdot x)$ выполняется для всех $\alpha > 0$ и $x \in L$;

- *нечёткий острый конус*, если суппорт этого конуса является острым, т.е. ни один ненулевой элемент суппорта не содержит противоположного ему элемента;

- *нечёткое выпуклое множество*, если неравенство $\eta(\theta x + (1-\theta) y) \geq \min\{\eta(x), \eta(y)\}$ выполняется для всех $x, y \in L$ и всех $\theta \in [0,1]$.

Нечёткое (бинарное) отношение задаётся на множестве *A* с помощью функции принадлежности $\mu : A \times A \to [0, 1]$; при этом число $\mu(x, y) \in [0, 1]$ интерпретируется как степень уверенности в том, что элемент *x* находится в данном отношении с элементом *y*. Нечёткое отношение с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$ называют

- *иррефлексивным*, если $\mu(x,x)=0 \quad \forall x \in A$;

- *транзитивным*, если $\mu(x,z) \geq \min\{\mu(x,y);\mu(y,z)\} \quad \forall x,y,z \in A$;

- *нечётким конусным отношением* на линейном пространстве *L*, если найдется такой нечёткий конус $\eta : L \to [0,1]$, что $\mu(x,y)=\eta(x-y) \quad \forall x,y \in L$;

- *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если оно задано на линейном пространстве *L* и выполняются равенства $\mu(\alpha x,\alpha y)=\mu(x,y),\ \mu(x+c,y+c)=\mu(x,y)$ $\forall x,y \in L$, $\forall \alpha > 0$, $\forall c \in L$.

Задача многокритериального нечёткого выбора

Через *X* обозначим (чёткое) *множество возможных решений* (*вариантов*), содержащее по крайней мере два элемента. Как известно, выбор решений состоит в указании среди всех возможных такого решения, которое объявляется выбранным (наилучшим, или оптимальным), хотя в некоторых случаях происходит выбор не одного, а целого набора решений, составляющих определённое подмножество множества возможных решений. Нередко при выборе относительно некоторых решений очень трудно однозначно сказать «хорошие» они или «плохие». С одной стороны, такие решения обладают целым рядом достоинств, которые дают основания причислять их к приемлемым; с другой – эти решения не лишены определённых недостатков, что не позволяет безоговорочно включить их в число выбираемых решений. В таких и подобных им случаях деление всех возможных решений лишь на два класса – выбранных и не выбранных («хороших» и «плохих») – решений является слишком «грубым»; удобнее оказывается более гибкий подход – с позиций теории нечётких множеств, состоящий в приписывании каждому возможному решению некоторого числа в пределах от 0 до 1, выражающего степень принадлежности множеству выбираемых решений. Это число можно также трактовать как степень (или долю) положительных качеств данного решения.

Введём *нечёткое множество выбираемых решений* *C*(*X*), а его функцию принадлежности обозначим $\lambda_X^C(\cdot)$ (при этом универсальным считается множество возможных решений *X*). Множество *C*(*X*) представляет собой решение задачи нечёткого выбора, и им может оказаться любое нечёткое подмножество множества возможных решений. Иными словами, решить задачу нечёткого выбора означает найти множество *C*(*X*) (точнее говоря, указать его функцию принадлежности).

Обычно выбранными оказываются такие возможные решения, которые наиболее полно удовлетворяют стремлениям, интересам и целям ЛПР. Желание ЛПР достичь определенной цели нередко удаётся в математических терминах выразить в виде максимизации (или минимизации) определённой числовой функции, заданной на множестве *X*. Однако в более сложных ситуациях приходится иметь дело не с одной, а сразу с несколькими функциями подобного типа. В соответствии с этим, пусть имеется *m* (*m* ≥ 2) числовых функций $f_1,...,f_m$, заданных на множестве *X*. Они образуют векторный критерий $f=(f_1,...,f_m)$, который принимает значения в *m*-мерном арифметическом пространстве R^m. Это пространство называют критериальным пространством, или пространством оценок (векторов), а всякое значение $f(x)=(f_1(x),...,f_m(x)) \in R^m$ векторного критерия *f* при определенном решении $x \in X$

именуют векторной оценкой решения *x*. Все векторные оценки образуют множество возможных векторов (оценок) $Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x)$ при некотором $x \in X\}$.

Для того чтобы осуществить обоснованный выбор, следует помимо векторного критерия располагать дополнительными сведениями о предпочтениях, вкусах ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу дополнительный элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения. Таким элементом здесь является нечёткое отношение предпочтения ЛПР.

Рассмотрим два возможных решения x' и x''. Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений оно отдает предпочтение первому со степенью уверенности $\mu_X(x', x'') \in (0, 1]$. Это означает, что данные два решения находятся в определённом нечётком отношении. В соответствии с этим будем считать, что на множестве возможных решений *X* задано нечёткое отношение предпочтения ЛПР, функция принадлежности которого есть $\mu_X(\cdot,\cdot)$. В частном случае это отношение может быть чётким. Сложность состоит в том, что на практике это отношение, как правило, полностью неизвестно.

Теперь можно окончательно перечислить все элементы *задачи нечёткого многокритериального выбора* (в терминах решений): множество возможных решений *X*, векторный критерий *f* , определённый на множестве *X*, а также нечёткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_X(\cdot,\cdot)$, заданной на декартовом произведении $X \times X$ и принимающей значения в пределах числового отрезка $[0, 1]$. Эту задачу можно сформулировать и в терминах векторов. С этой целью через *C*(*Y*) обозначим нечёткое множество выбираемых векторов, функция принадлежности которого естественным образом определяется функцией принадлежности нечёткого множества выбираемых решений

$$\lambda^C(y) = \begin{cases} \lambda_X^C(x), & \text{если } y = f(x) \text{ при некотором } x \in X \\ 0, & \text{если } y \in \hat{Y},\ y \notin Y \end{cases}$$

Функцией $\mu_X(\cdot,\cdot)$ индуцируется функция принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$ нечёткого отношения предпочтения на множестве *Y* следующим образом:

$$\mu_Y(y', y'') = \mu_X(x', x'') \qquad \text{при} \quad y' = f(x'), \quad y'' = f(x''), \quad x', x'' \in X .$$

В свою очередь, функция принадлежности нечёткого отношения предпочтения, заданного на множестве векторов *Y*, индуцирует функцию принадлежности нечёткого отношения предпочтения на множестве решений *X*.

В итоге задача нечёткого многокритериального выбора (в терминах векторов) включает множество возможных векторов Y и нечёткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$, заданной на декартовом произведении $Y \times Y$, а заключается она в нахождении нечёткого множества выбираемых векторов C(Y) с функцией принадлежности $\lambda^C(\cdot)$. Сформулированные две задачи (в терминах решений и в терминах векторов) в известном смысле эквивалентны. Поэтому все результаты, полученные для одной из этих задач, могут быть без труда переформулированы для другой.

Аксиомы нечёткого выбора

Сформулируем ряд требований (аксиом), которые в дальнейшем будут предполагаться выполненными.

Аксиома 1. Для всякой пары решений $x', x'' \in X$, для которых выполнено соотношение $\mu_X(x', x'') = \mu^* \in [0, 1]$, справедливо неравенство $\lambda_X^C(x'') \le 1 - \mu^*$, или ему равносильное $\lambda^C(y'') \le 1 - \mu^*$, где $y' = f(x'), y'' = f(x'')$.

В частном случае $\mu^* = 1$ в соответствии с Аксиомой 1 получаем, что доминируемое решение, т.е. решение, для которого существует более предпочтительное, не может входить в множество выбираемых решений $C(X)$. По этой причине данную аксиому принято называть аксиомой исключения доминируемых вариантов.

Аксиома Парето. Для любой пары решений $x', x'' \in X$, такой что $f(x') \ge f(x'')$, имеет место равенство $\mu_X(x', x'') = 1$.

Заметим, что в последней аксиоме векторное неравенство $f(x') \ge f(x'')$ означает выполнение $f_i(x') \ge f_i(x'')$ для всех $i = 1,2,...,m$, причём $f(x') \ne f(x'')$.

Напомним определение множеств парето-оптимальных решений и векторов

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \textit{не существует } x \in X, \textit{для которого} \quad f(x) \ge f(x^*)\}$$

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \textit{не существует } y \in Y, \textit{для которого} \quad y \ge y^*\}.$$

Непосредственно из приведённых аксиом вытекает

Принцип Эджворта-Парето [ ]**.** В условиях выполнения Аксиомы 1 и Аксиомы Парето справедливы включения

$$C(X) \subset P_f(X), \quad C(Y) \subset P(Y).$$

В соответствии с данным принципом для достаточно широкого класса задач многокритериального выбора решение этих задач, т.е. нахождение множеств $C(X)$ и $C(Y)$, сводится к отысканию (нечётких) подмножеств множества Парето. По этой причине и возникает так называемая *проблема сужения множества Парето* [Ногин, 2008], обоснованное решение которой невозможно без привлечения дополнительной информации. В данной работе в качестве такой информации используются сведения о характере поведения ЛПР в процессе принятия решений, выраженные в виде четырёх «разумных» аксиом, а также фрагментарные сведения о его нечётком отношении предпочтения.

Аксиома 2. Существует нечёткое отношение с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$, определённое на всём пространстве R^m, которое является иррефлексивным и транзитивным, причём $\mu(y', y'') = \mu_Y(y', y'')$ для всех $y', y'' \in Y$.

Иными словами, в соответствии с данной аксиомой исходное нечёткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$ может быть продолжено на всё критериальное пространство, причём это продолжение должно быть иррефлексивным и транзитивным.

Аксиома 3. Критерии $f_1(x),...,f_m(x)$ согласованы с отношением предпочтения в том смысле, что для любых $y', y'' \in R^m$ из выполнения соотношений

$$y' = (y'_1,..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1},.., y'_m), \qquad y'' = (y'_1,..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1},..., y'_m), \qquad y'_i > y''_i$$

следует равенство $\mu(y', y'') = 1$.

Согласованность означает, что при прочих равных условиях ЛПР заинтересовано в максимизации значений по каждому из имеющихся критериев.

Аксиома 4. *Нечёткое отношение с функцией принадлежности* $\mu(\cdot,\cdot)$ *является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Квант нечёткой информации об отношении предпочтения и его использование для сужения множества Парето

Далее будем предполагать выполненными Аксиомы 1 – 4. Введем множество номеров критериев $I = \{1,2,...,m\}$.

В основе используемого автором аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето лежит следующее

Определение 1. Пусть имеются две группы (номеров) критериев A и B ($A, B \subset I$, $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, A \cap B = \varnothing$). Будем говорить, что задан *квант нечёткой информации* об отношении предпочтения с двумя заданными наборами положительных параметров w_i (для всех $i \in A$), w_j (для всех $j \in B$) и степенью уверенности $\mu^* \in (0, 1]$, если для всех векторов $y', y'' \in R^m$, для которых

$$y'_i - y''_i = w_i \quad \forall i \in A, \quad y''_j - y'_j = w_j \quad \forall j \in B, \quad y'_s = y''_z \quad \forall s \in I \setminus (A \cup B)$$

имеет место равенство $\mu(y', y'') = \mu^*$.

Наличие указанного кванта означает, что ЛПР готово идти на определённый компромисс, который выражается в согласии потерять по критериям f_j группы B не более чем w_j единиц (для всех $j \in B$) для того, чтобы получить прибавку в размере не менее w_i единиц по критериям f_i (для всех $i \in A$) группы A. При этом степень уверенности в указанном компромиссе ЛПР оценивает величиной параметра $\mu^* \in (0, 1]$. Благодаря наличию кванта нечёткой информации вектор y' доминирует вектор y'' со степенью уверенности, равной μ^*, а значит, согласно Аксиоме 1, степень вхождения второго вектора в множество выбираемых векторов не должна превышать $1 - \mu^*$. Тем самым, происходит уменьшение степени принадлежности парето-оптимального вектора y'', что можно рассматривать как определённое сужение множества Парето. Ясно, что подобное сужение в общем случае не представляется существенным. Однако одно из замечательных свойств рассматриваемого аксиоматического подхода состоит в том, что на самом деле, благодаря принятым Аксиомам 1 − 4, как правило, будет происходить значительно большее сужение множества Парето. Об этом свидетельствует следующий результат.

Теорема 1 . *Пусть имеется квант нечёткой информации в смысле определения 1. Тогда выполняются неравенства*

$$\lambda^C(y) \le \lambda^M(y) \le \lambda^P(y) \quad \forall y \in Y,$$

где $\lambda^C(y)$ – *функция принадлежности нечёткого множества выбираемых векторов*, $\lambda^P(y)$ – *характеристическая функция множества Парето, а* $\lambda^M(y)$ – *функция принадлежности, определяемая равенствами*

$$\lambda^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \varsigma(z, y) \quad \forall y \in Y,$$

$$\varsigma(z,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu^*, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^p, \quad z - y \notin R_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad \forall y, z \in Y,$$

где $R_+^m = \{y \in R^m \mid y \ge 0_m\}$, $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$ *и вектор* $\hat{y}$ (*а также* $\hat{z}$) *составлен из компонент* $y_i, i \in I \setminus B$, (*соответственно,* $z_i, i \in I \setminus B$), *а остальные его компоненты имеют вид* $w_j y_i + w_i y_j$ (*соответственно,* $w_j z_i + w_i z_j$) *при всех* $i \in A,\ j \in B$.

Здесь через $|A|, |B|$ обозначены кардинальные числа соответствующих множеств.

Анализ формулировки последней теоремы показывает, что для построения нечёткого множества с функцией принадлежности $\lambda^M(y)$ следует решить две (чёткие) многокритериальные задачи (точнее говоря, найти множества Парето в двух многокритериальных задачах). Начать следует с многокритериальной задачи, содержащей исходную векторную функцию f и множество возможных решений X. После чего всем векторам найденного множества Парето нужно присвоить степень принадлежности, равную единице, а остальным векторам – нулевую степень принадлежности. Затем на том же самом множестве возможных решений X необходимо решить многокритериальную задачу с новой (“пересчитанной”) p-мерной векторной функцией, имеющей компоненты f_i для всех $i \in I \setminus B$ и $w_j f_i + w_i f_j$ для всех $i \in A,\ j \in B$, после чего всем векторам “старого” множества Парето, которые не попали в “новое” множество Парето, на этот раз присвоить степень принадлежности $1 - \mu^*$. Тем самым, искомое множество, представляющее собой более точную оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов, чем исходное множество Парето, будет построено.

Пример. Пусть $m = 2$, $Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\} \subset R^2$, $y^1 = (0,3), y^2 = (1,1), y^3 = (2,1), y^4 = (4,0)$. В данном случае множество парето-оптимальных векторов состоит из трех элементов: $\lambda_Y^P(y^1) = \lambda_Y^P(y^3) = \lambda_Y^P(y^4) = 1$, $\lambda_Y^P(y^2) = 0$, так как $y^3 \ge y^2$. Предположим, что от ЛПР получена информация в виде нечёткого кванта с параметрами $w_1 = 3$, $w_2 = 7$, $A = \{1\}, B = \{2\}$ и $\mu^* = 0.6$. В соответствии с теоремой 1, имеем

$$\hat{y}^1 = (0,0.9),\ \hat{y}^2 = (1,1),\ \hat{y}^3 = (2,1.7),\ \hat{y}^4 = (4,2.8)$$

$$\varsigma(y^1, y^2) = \varsigma(y^1, y^3) = \varsigma(y^1, y^4) = \varsigma(y^2, y^3) = \varsigma(y^2, y^4) = \varsigma(y^3, y^4) = 0$$

$$\varsigma(y^2, y^1) = \varsigma(y^3, y^1) = \varsigma(y^4, y^1) = \varsigma(y^4, y^2) = \varsigma(y^4, y^3) = 0.6\ ,\ \varsigma(y^3, y^2) = 1$$

$$\lambda^M(y^1) = 1 - \max\{0.6, 0.6, 0.6\} = 0.4\ ,\ \lambda^M(y^2) = 1 - \max\{0,1,0.6\} = 0\ ,$$

$$\lambda^M(y^3) = 1 - \max\{0, 0, 0.6\} = 0.4\ ,\ \lambda^M(y^4) = 1 - \max\{0,0,0\} = 1\ .$$

Нечёткое множество с функцией принадлежности $\lambda^M(y^1) = 0.4$, $\lambda^M(y^2) = 0$, $\lambda^M(y^3) = 0.4$, $\lambda^M(y^4) = 1$ даёт оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов в том смысле, что множество выбираемых векторов содержится в указанном нечётком множестве.

К той же самой оценке сверху можно прийти более простым путем, действуя следующим образом. На первом шаге присвоим всем парето-оптимальным векторам исходной многокритериальной задачи степень принадлежности, равную 1, а остальным векторам (в данном случае одному второму вектору y^2) степень принадлежности, равную 0. На втором шаге найдём парето-оптимальные векторы множества “пересчитанных” векторов $\{\hat{y}^1, \hat{y}^3, \hat{y}^4\}$. Таковым оказывается единственный вектор $\{\hat{y}^4\}$. Следовательно, первому и третьему векторам (т.е. y^1, y^3) следует присвоить степень принадлежности, равную 1– 0.6 = 0.4. В итоге приходим к уже найденной выше оценке сверху.

Замечание. Из приведённого примера видно, что в общем случае сужение множества Парето за счёт использования кванта нечёткой информации не приводит к однозначному выбору. Более того, заранее нельзя определить насколько значительным окажется сужение при использовании того или иного кванта информации (в некоторых случаях сужения может и не произойти). Можно сказать, что при готовности ЛПР идти на существенный компромисс (это будет в случае $w_j >> w_i$) и параметре μ^* равном или близком к 1, можно ожидать большего сокращения множества Парето, чем в противном случае. Однако следует заметить, что указанная степень сужения в значительной мере зависит не только от исполльзуемого кванта информации (т.е. от величин w_i, w_j и μ^*), но и от структуры множества возможных решений X , а также от вида векторного критерия f . Данное положение хорошо согласуется с обыденными представлениями человека о «ценности» информации – одно и то же сообщение может нести разный смысл и иметь различную ценность для различных людей.

Для того чтобы получить большую степень сужения множества Парето, можно использовать не один, а сразу несколько квантов информации. Об этом пойдёт речь в следующем разделе.

Непротиворечивый набор квантов нечёткой информации и их использование для сужения множества Парето

В задании кванта нечёткой информации (определение 1) участвуют два определённым образом связанных друг с другом вектора $y', y'' \in R^m$. Для этих векторов справедливо равенство $\mu(y', y'') = \mu^*$. Согласно Аксиоме 4, бинарное отношение $\mu(\cdot,\cdot)$ является инвариантным, поэтому последнее равенство можно переписать в виде $\mu(y'-y'',0_m)=\mu^*$. Это означает, что квант нечёткой информации может быть задан с помощью указания вектора $u=y'-y''$, имеющего хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты, а также числа μ^*, такого что $\mu(u,0_m)=\mu^*$. Обозначим через N^m множество всех *m*-мерных векторов, имеющих по крайней мере одну положительную и одну отрицательную компоненты.

Рассмотрим общий случай, когда имеется не один, а сразу несколько квантов нечёткой информации. Тем самым, пусть задан набор векторов $\{u^s\}_{s=1}^k \subset N^m$ и чисел $\{\mu_s\}_{s=1}^k \subset (0,1]$. Обозначим через $\mu_{11},...,\mu_{1k_1};\mu_{21},...\mu_{2k_2};...;\mu_{l1},...,\mu_{lk_l}$ такую перестановку чисел $\mu_1,\mu_2,...,\mu_k$, что

$$1\geq\mu_{11}=...=\mu_{1k_1}>\mu_{21}=...=\mu_{2k_2}>...>\mu_{l1}=...=\mu_{lk_l}>0,$$

где $k_1+...+k_l=k,\ 1\leq l\leq k$. Тем самым, имеет место следующее взаимно однозначное соответствие: каждому вектору u^s соответствует определённое положительное число $\mu_{rt}\ (r\in\{1,2,...,l\},t\in\{1,2,...,k_r\})$, такое, что $\mu_s=\mu_{rt}$. Обратно, каждому числу $\mu_{rt},\ (r\in\{1,2,...,l\},t\in\{1,2,...,k_r\})$ отвечает определённый вектор из набора $u^s\in N^m$, $s=1,2,...,k$.

Пусть e^i − единичный орт векторного пространства R^m. Введем (чёткие) выпуклые конусы $K_h, h\in\{1,...,l\}$, порождаемые единичными векторами $e^1,...,e^m$ и всеми теми векторами, которым отвечают числа $\mu_i\ (\mu_i=\mu_{rs}$ при некоторых $r,s)$, причем $\mu_i\geq\mu_{h1}$. Они представляют собой совокупность линейных неотрицательных комбинаций указанных векторов. Из приведённого определения немедленно вытекают включения $K_1\subset K_2\subset...\subset K_l$.

Определение 2. Векторы $\{u^s\}_{s=1}^k\subset N^m$ вместе с числами $\mu_1,...,\mu_k\in(0,1], k\geq1$, задают *непротиворечивый* (*совместный*) *набор* квантов нечёткой информации, если существует хотя бы одно нечёткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющее аксиомам 2−4 и такое, что $\mu(u^i,0_m)=\mu_i, i=1,...,k$.

Теорема 2. *Для того чтобы векторы* $u^i\in N^m$, $i=1,2,...,k$, *вместе с набором чисел* $\mu_1,\mu_2,...,\mu_k\in(0,1]$ *задавали непротиворечивый набор квантов нечёткой информации, необходимо и достаточно, чтобы ни один конус* K_h, $h\in\{2,...,l\}$, *не содержал вектора* u^i, $i\in\{1,2,...,k\}$, *которому соответствует число* μ_i, *такое, что* $\mu_i<\mu_{h1}$, *и, кроме того, однородная система линейных уравнений*

$$\lambda_1e^1+...+\lambda_me^m+\xi_1u^1+...+\xi_ku^k=0_n$$

не имела ни одного ненулевого неотрицательного решения относительно $\lambda_1,...,\lambda_m,\xi_1,...,\xi_k$.

В работе [Богданова, Ногин 2007] указывается, каким образом можно сузить множество Парето на основе двух квантов нечёткой информации специального вида. Этот учёт также сводится к решению нескольких (чётких) задач построения множества Парето.

Далее приведём некоторые результаты, которые были получены недавно Захаровым А.О. Заметим, что на данный момент задача сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора квантов нечёткой информации полностью ещё не решена.

Напомним, что I есть множество всех номеров критериев $\{1, ..., m\}$. Пусть I_k некоторое его подмножество, т.е. $I_k \subseteq I$; $I_k = \{i_1, ..., i_k\}$, $i_j \in \{1, ..., m\}$, $j = 1,...,k$.

Определение 3. Будем говорить, что задан *набор нечёткой замкнутой информации* со степенями уверенности $\mu_1, ..., \mu_k \in (0, 1]$ и положительными параметрами $w_{i_1}^{(1)}$, $w_{i_2}^{(1)}$, $w_{i_2}^{(2)}$, $w_{i_3}^{(2)}$, …, $w_{i_{k-1}}^{(k-1)}$, $w_{i_k}^{(k-1)}$, $w_{i_k}^{(k)}$, $w_{i_1}^{(k)}$, если для векторов $y^{(1)}$, …, $y^{(k)} \in R^m$ таких, что

$$y_{i_1}^{(1)} = w_{i_1}^{(1)}, \quad y_{i_2}^{(1)} = -w_{i_2}^{(1)}, \quad y_s^{(1)} = 0, \quad \forall s \in I \setminus \{i_1, i_2\};$$

$$y_{i_2}^{(2)} = w_{i_2}^{(2)}, \quad y_{i_3}^{(2)} = -w_{i_3}^{(2)}, \quad y_s^{(2)} = 0, \quad \forall s \in I \setminus \{i_2, i_3\};$$

$$\ldots$$

$$y_{i_k}^{(k)} = w_{i_k}^{(k)}, \quad y_{i_1}^{(k)} = -w_{i_1}^{(k)}, \quad y_s^{(k)} = 0, \quad \forall s \in I \setminus \{i_1, i_k\}$$

справедливы равенства $\mu(y^{(1)}, 0_m) = \mu_1$, …, $\mu(y^{(k)}, 0_m) = \mu_k$.

Введем матрицу

$$W = \begin{pmatrix} w_{i_1}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 & -w_{i_1}^{(k)} \\ -w_{i_2}^{(1)} & w_{i_2}^{(2)} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & w_{i_{k-1}}^{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -w_{i_k}^{(k-1)} & w_{i_k}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Указанный набор квантов нечёткой замкнутой информации непротиворечив в том и только случае, когда определитель матрицы W строго положителен.

Перейдём к вопросу использования произвольного конечного набора квантов нечёткой информации для сужения множества Парето. К настоящему времени в этом направлении получены лишь отдельные результаты, которые показывают, каким образом следует использовать тот или иной набор квантов специального вида. Пусть задан набор квантов нечёткой замкнутой информации в случае трех критериев со степенями уверенности μ_1, μ_2, $\mu_3 \in (0, 1]$, что, согласно определению 3, означает, что векторы $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)} \in R^m$ с компонентами

$$y_i^{(1)} = w_i^{(1)}, \; y_j^{(1)} = -w_j^{(1)}, \; y_s^{(1)} = 0 \quad \forall s \in I \setminus \{i, j\},$$

$$y_j^{(2)} = w_j^{(2)}, \; y_l^{(2)} = -w_l^{(2)}, \; y_s^{(2)} = 0 \quad \forall s \in I \setminus \{j, l\},$$

$$y_l^{(3)} = w_l^{(3)}, \; y_i^{(3)} = -w_i^{(3)}, \; y_s^{(3)} = 0 \quad \forall s \in I \setminus \{l, i\}$$

удовлетворяют равенствам $\mu(y^{(1)}, 0_m) = \mu_1$, $\mu(y^{(2)}, 0_m) = \mu_2$, $\mu(y^{(3)}, 0_m) = \mu_3$. При этом будем считать, что данная информация непротиворечива.

Упорядочим числа μ_1, μ_2, μ_3 так, чтобы $\tilde{\mu}_1 \ge \tilde{\mu}_2 \ge \tilde{\mu}_3$, где $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3$ есть некоторая перестановка чисел μ_1, μ_2, μ_3. Рассмотрим случай $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \mu_3$. Пусть этим числам μ_1, μ_2, μ_3 соответствует упорядоченный набор векторов $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$. Следует заметить, что под данный случай подпадают и ситуации, когда $\mu_3 \ge \mu_1 \ge \mu_2$ и $\mu_2 \ge \mu_3 \ge \mu_1$.

Введём функцию принадлежности

$$\lambda_Y^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \zeta(z, y) \quad \forall y \in Y ,$$

где

$$\zeta(z,y) = \begin{cases} 1, & \textit{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu_1, & \textit{если } \bar{z} - \bar{y} \in R_+^m, z - y \notin R_+^m, \\ \mu_2, & \textit{если } \tilde{z} - \tilde{y} \in R_+^m, \bar{z} - \bar{y} \notin R_+^m, \\ \mu_3, & \textit{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^m, \tilde{z} - \tilde{y} \notin R_+^m, \\ 0, & \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \quad \forall y, z \in Y,\ y \ne z,$$

а векторы $\bar{a}$, $\tilde{a}$, $\hat{a}$, где $a = (a_1, \ldots a_m) \in \{y, z\}$, определяются следующим образом

$$\bar{a} = a + \left(w_j^{(1)} a_i + \left(w_i^{(1)} - 1\right) a_j\right) e^j ,$$

$$\tilde{a} = a + \left(w_j^{(1)} a_i + \left(w_i^{(1)} - 1\right) a_j\right) e^j + \left(w_l^{(2)} w_j^{(1)} a_i + w_l^{(2)} w_i^{(1)} a_j + \left(w_j^{(2)} w_i^{(1)} - 1\right) a_l\right) e^l ,$$

$$\hat{a} = a + \left(\left(w_i^{(2)} w_l^{(3)} - 1\right) a_i + w_l^{(2)} w_i^{(3)} a_j + w_j^{(2)} w_i^{(3)} a_l\right) e^i + \left(w_j^{(1)} w_l^{(3)} a_i + \left(w_i^{(1)} w_l^{(3)} - 1\right) a_j + w_j^{(1)} w_i^{(3)} a_l\right) e^j +$$
$$+ \left(w_l^{(2)} w_j^{(1)} a_i + w_l^{(2)} w_i^{(1)} a_j + \left(w_j^{(2)} w_i^{(1)} - 1\right) a_l\right) e^l .$$

Теорема 4. Пусть имеется указанный выше набор квантов непротиворечивой нечёткой замкнутой информации. Тогда для любой функции принадлежности $\lambda^C(\cdot)$ нечёткого множества выбираемых векторов C(Y) справедливо неравенство

$$\lambda^C(y) \le \lambda_Y^M(y) \le \lambda_Y^P(y) \textit{ для всех } y \in Y ,$$

где функция $\lambda_Y^M(\cdot)$ определена выше.

Заключение

Рассмотрена задача многокритериального выбора, включающая множество возможных решений, векторный критерий и нечёткое отношение предпочтения ЛПР, относительно которого имеются лишь некоторые фрагментарные сведения в виде так называемых квантов нечёткой информации. Предполагается, что ЛПР в процессе принятия решений ведёт себя «разумно», т.е. в соответствии с Аксиомами 1- 4. В этом случае имеющаяся в наличии нечёткая информация может быть использована для сужения множества Парето и облегчения последующего выбора наилучших решений. Получен ряд результатов, которые можно рассматривать как определённые правила учёта квантов нечёткой информации в процессе принятия решений, однако в общем случае задача сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора квантов нечёткой информации ещё не получила своего окончательного решения.

Благодарность

Автор выражает признательность ITHEA International Scientific Society за финансовую поддержку .

Литература

[Zadeh, 1965] Zadeh L.A. Fuzzy sets //Information and Control. 1965. Vol. 8. P. 338–353.

[Ногин, 2003] Ногин В.Д. Принцип Эджворта – Парето и относительная важность критериев в случае нечёткого отношения предпочтения//Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 11. С. 1676–1686.

[Ногин, 2005] Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (изд. 2, испр. и доп.). М.: Физматлит. 2005. 176 с.

[Ногин, 2008] Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению//Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 1, С. 98-112.

[Богданова, Ногин 2007] Богданова А.В., Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе простейших наборов нечёткой информации об относительной важности критериев//Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: «Прикладная математика. Информатика. Процессы управления». 2007. Вып. 2. С. 3–17.

Информация об авторе

Владимир Ногин – *профессор Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, 198504, Петродворец, Университетский пр. 35, Россия; e-mail: noghin@gmail.com, web-page: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/*

Основная область научных интересов*: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация*