КОМПРОМИССНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Альберт Воронин

Аннотация: *Рассмотрена возможность получения компромиссного решения в задачах условной оптимизации. Проблема состоит в том, чтобы полученное решение отражало компромисс между противоречивыми требованиями экстремизации целевой функции и выполнения ограничений. Для решения рассматриваемой проблемы предпринимается подход многокритериальной оптимизации с применением нелинейной схемы компромиссов. Приведен модельный пример.*

Ключевые слова: *нелинейное программирование, целевая функция, многокритериальная оптимизация, ограничения, нелинейная схема компромиссов.*

ACM Classification Keywords: *H.1 Models and Principles – H.1.1 – Systems and Information Theory; H.4.2 – Types of Systems.*

Содержание проблемы

Задачи оптимизации в различных предметных областях обычно сводятся к поиску экстремума целевой функции, ограниченной условиями, наложенными на аргументы оптимизации. Для решения таких задач привлекается аппарат математического программирования. Изложим кратко некоторые основные понятия из этой области.

Математическое программирование – это математическая дисциплина, в которой разрабатываются методы отыскания экстремальных значений целевой функции f(x) среди множества ее возможных значений, определяемых ограничениями ψ(x).

Достаточно общая задача математического программирования формулируется так:

– найти оптимальное сочетание аргументов оптимизации, доставляющее экстремум целевой функции при заданных ограничениях:

$$x^* = \arg \operatorname*{extr}_{x \in X} f(x),$$

при $X = \{x \,|\, x_i \geq 0, \forall i \in [1,n], \psi_j(x) \leq 0, \forall j \in [1,m]\}$. Допускаются n>m, n=m, n<m. Функции f(x) и ψ_j(x) – произвольные.

В зависимости от свойств целевой функции и функций ограничений все задачи математического программирования делятся на два основных класса:

- задачи линейного программирования,
- задачи нелинейного программирования.

Если целевая функция и функции ограничений – линейные функции, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей нелинейного программирования. В настоящей работе ограничимся рассмотрением задач нелинейного программирования.

Для конструктивного решения задачи делаются дополнительные частные предположения. В наиболее простом случае рассматривается задача *без ограничений* (оптимизация в открытой области, безусловная оптимизация). Обычно используется необходимое условие экстремума функции как следствие из теоремы Ферма:

$$\partial f(x) / \partial x_i = 0, i \in [1, n],$$

имея в виду, что достаточное условие (минимум или максимум) вытекает из физического смысла задачи. При необходимости достаточное условие определяется по знаку второй производной в точке экстремума (знак плюс означает минимум функции, а минус – максимум).

Решая эту систему уравнений, получаем требуемый набор $x^*=x^o$ из n аргументов оптимизации.

Наличие ограничений делает задачи математического программирования принципиально отличными от обычных задач математического анализа по отысканию экстремальных значений функции. В этом случае имеет место *условная* оптимизация.

В классической постановке рассматривается случай строгого равенства ограничений некоторым константам: $\psi_j(x)=b_j, \forall j \in [1,m]$. Это так называемая изопериметрическая задача («задача Дидоны»).

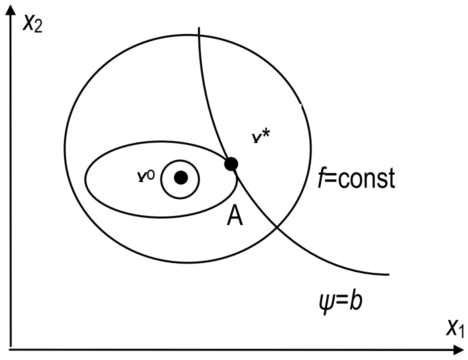

Рис.1

На Рис.1 показана двумерная по аргументам и с одним ограничением иллюстрация изопериметрической задачи. Поверхность функции f(x) представляется линиями равного уровня f(x) =const (как на топографических картах), а ограничение представляется проекцией пространственной кривой $\psi(x)=b$ на координатную плоскость.

Для решения изопериметрических задач пользуются методом множителей Лагранжа. Составляется функция Лагранжа

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[b_j - \psi_j(x)\right],$$

где λ_j, $j \in [1, m]$ – неопределенные множители Лагранжа, которая исследуется на *безусловный* экстремум. Для этого используется необходимое условие экстремума функции и решается система уравнений

$$\partial\Phi / \partial x_i = 0,\ i \in [1, n];$$
$$\partial\Phi / \partial\lambda_j = \psi_j - b_j = 0,\ j \in [1.m].$$

Получается n значений вектора x* (точка A на Рис.1) и, как побочный результат, m значений вектора λ* множителей Лагранжа, при котором уравнения связей выполняются строго.

Анализ физического смысла множителей Лагранжа говорит о том, что по величине l-го множителя λ_l, l∈[1,m] можно судить о мере несоответствия l-го условия связи и требования экстремизации целевой функции. Действительно, пусть кривая ψ(x)=b на Рис.1 такова, что она проходит через точку $x^{(o)}$ экстремума функции f(x). В этом случае процедура множителей Лагранжа дает результат $x^*=x^o$ и λ =0, то есть здесь требования выполнения ограничения и экстремизации целевой функции не противоречат друг другу. И, наоборот, чем дальше точка x* от $x^{(o)}$, тем больше значение коэффициента λ. Следовательно, множители Лагранжа λ в данной задаче являются векторной мерой того, насколько строгие уравнения ограничений «мешают» достичь экстремума функции f(x).

Если ограничения заданы как неравенства $\psi(x) \le 0$, а функции f(x) и ψ(x) выпуклые, то для решения задачи привлекается теорема Куна-Таккера, которая обобщает теорему Лагранжа для неклассических задач. Краткая формулировка теоремы Куна-Таккера: *для того, чтобы целевая функция* f(x) *достигала в точке* x* *глобального условного экстремума, необходимо и достаточно, чтобы* x*, λ* *являлась глобальной седловой точкой функции Лагранжа*. Это значит, что

$$\Phi(x, \lambda^*) \ge \Phi(x^*, \lambda^*) \ge \Phi(x^*, \lambda)$$

для всех x, λ из области определения задачи.

В соответствии с этой теоремой, при заданных предположениях поверхность функции Лагранжа в пространстве (x ,λ) имеет оптимальную точку x*, λ*, которая является *седловой* и определяется как

$$x^*, \lambda^* = \arg\min_x \max_\lambda \Phi(x, \lambda).$$

Алгоритм решения задач поиска экстремумов в случае функций с седловыми точками обычно сводится к решению системы уравнений

$$x^*_i \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_{x^*_i} = 0, i \in [1, n]; \lambda^*_j \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_j}\right)_{\lambda^*_j} = 0, j \in [1, m].$$

Анализ задач условной оптимизации приводит к выводу, что требования, предъявляемые к экстремизации целевой функции и выполнения ограничений *противоречивы*. При этом в изопериметрической задаче приоритет полностью отдается выполнению ограничений, а целевая функция экстремизируется при условии их строгого выполнения. В задаче Куна–Таккера эти противоречивые требования удовлетворяются строго в одинаковой мере.

Между тем, само понятие противоречивости требований предполагает возможность *компромисса* при их удовлетворении. Результатом этого вывода может быть методика решения, при которой условия связи выполняются не точно, а компромиссно. Если принять это допущение, то решения, полученные с помощью множителей Лагранжа, представляются всего лишь точками в континууме возможных компромиссных решений.

Проблема состоит в том, чтобы полученное при этом допущении решение отражало компромисс между противоречивыми требованиями экстремизации целевой функции и выполнения ограничений. Если указанные противоречивые требования облечь в форму частных критериев, то такая ситуация дает основание для привлечения к решению задачи условной оптимизации подхода многокритериальной (в данном случае двухкритериальной) оптимизации.

Субъективность в методике решения задачи

По своей сути компромисс является прерогативой человека, лица, принимающего решение (ЛПР). Получая компромиссное решение, мы намеренно вводим в методику решения задачи субъективный фактор в виде предпочтений ЛПР. Остановимся на этом подробнее.

В настоящее время в науке все чаще проявляются черты смены парадигмы, перехода от стиля классицизма к концепциям постклассической науки. Характерной чертой стиля современной науки является включение в методику решения задач человека (эксперт, ЛПР), в отличие от классической науки, возводившей формализацию в абсолют и ставившей целью исключать при описании действительности все сколько-нибудь субъективные суждения.

Считалось, что познание следует освобождать от случайностей, пристрастий и слабостей индивидуального человеческого исполнения. Наука строится по строгим правилам логики, и поэтому часто кажется, что личностное, человеческое – наши идеи, пристрастия, общее представление о мире – тут никакой роли не играет. Но любая логика начинает развиваться от постулатов, от аксиом, которые сами по себе никак логически не обоснованы. Бесспорно, естественные науки изучают объективный мир природы, находящейся вне нас и от нас не зависимый. Но исследователь рассматривает этот мир глазами человека определенной эпохи, определенной культуры, наконец, определенного психического и интеллектуального склада, – и все это накладывает отпечаток на его деятельность и результаты этой деятельности.

Уже создание и выбор моделей, конкретизация целевого функционала и выбор метода исследования является чисто человеческим делом и несет печать личности исследователя, а в области изучения сложных систем незаменим его личный опыт и интуиция [1]. Наука включает в свой предмет человека, допуская элементы субъективности в объективно истинном знании. Наблюдатель осознает себя частью исследуемого мира, активно взаимодействующей с наблюдаемым объектом. Познание в концепциях современной науки – диалогично.

Возвращаясь к понятию компромисса, заметим, что вся теория многокритериальной оптимизации построена на идеях компромисса и все ее проблемы сводятся к способам формализации субъективных предпочтений ЛПР.

Постановка задачи

Логика компромисса требует, чтобы при решении задачи на условный экстремум *назначались* границы допустимых, с точки зрения ЛПР, отступлений от строгих равенств по ограничениям, а также определялась предельно допустимая для него величина ухудшения целевой функции. Эти назначенные величины образуют пространство компромисса, в котором ищется приемлемое для данного ЛПР компромиссно-оптимальное решение.

Пусть выражения $\psi_j(x)=0$, $\forall j \in [1,m]$ таковы, что по физическим соображениям могут быть допущены отступления от строгих равенств в некоторых назначенных пределах:

$$\psi_j(x) \le A_j \; j \in [1,m].$$

Положим для определенности, что целевая функция f(x) является минимизируемой. Определена некоторая предельная величина, выше которой минимизируемая целевая функция, с точки зрения ЛПР, не может (или не должна) подниматься:

$$f(x) \le B.$$

Ставится задача: определить компромиссно-оптимальное решение x*.

Метод решения

В данной задаче выражения для ограничений $\psi_j(x)$ и целевая функция f(x) могут рассматриваться как своего рода минимизируемые, неотрицательные и ограниченные *критерии*. Возникают все предпосылки для применения к задаче условной оптимизации подхода многокритериальной оптимизации.

Суть понятия «компромисс» заключается в ответе на вопрос: сколькими единицами выигрыша по одному критерию можно, по мнению ЛПР, компенсировать неизбежный проигрыш единицы по другому критерию (другим) в заданной ситуации? На основании этой информации формулируется конкретная схема компромиссов для данной многокритериальной задачи и в итоге находится искомое решение.

Таким образом, определение многокритериального решения по своей природе компромиссно и основано на использовании субъективной информации. Имея эту информацию и выбрав схему компромиссов, можно перейти от общего векторного выражения к скалярной свертке частных критериев, что является основой для построения конструктивного аппарата решения многокритериальных задач. Возможность решения проблемы основана на гипотезе существования некоторой *функции полезности*, возникающей в сознании ЛПР при решении конкретной многокритериальной задачи. Можно утверждать, что практически все подходы к определению скалярной свертки критериев сводятся к построению той или иной математической модели функции полезности ЛПР.

Предполагается, что существуют некоторые инварианты, правила, обычно являющиеся общими для всех ЛПР независимо от их индивидуальных склонностей, которых они одинаково придерживаются в той или иной ситуации. Согласно [2] субъективность ЛПР имеет свои границы. В деловых решениях человек обязан быть рациональным, чтобы иметь возможность аргументировать мотивы своего выбора, логику своей субъективной модели. Поэтому любые предпочтения ЛПР должны находиться в рамках определенной рациональной системы. Это и делает возможной формализацию.

В данном случае предметом исследования является такая тонкая субстанция, как воображаемая функция полезности, возникающая в сознании ЛПР при решении конкретной многокритериальной задачи. У каждого ЛПР своя функция полезности. Тем не менее, можно получить сведения для задания вида содержательной модели критериальной функции, если выявить и проанализировать некоторые общие закономерности, наблюдаемые в процессе принятия многокритериальных решений различными ЛПР в разных ситуациях. При этом напряженность ситуации характеризуется близостью критериев к своим предельно допустимым значениям. Такой анализ [2,3] позволил сформулировать универсальную скалярную свертку частных критериев, которая выражает схему компромиссов, адаптирующуюся к ситуации принятия многокритериальных решений (нелинейная схема компромиссов).

Тогда может быть предложена следующая процедура условной оптимизации, основанная на концепции нелинейной схемы компромиссов:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \{ \sum_{j=1}^{m} A_j [A_j - \psi_j(x)]^{-1} + B[B - f(x)]^{-1} \}.$$

Из этого выражения видно, что полученное решение является результатом компромисса между стремлением удовлетворить строгие ограничения $\psi_j(x)=0,\ \forall j \in [1,m]$ и тенденцией минимизировать целевую функцию f(x). При этом решение осуществляется по нелинейной схеме компромиссов, основанной на принципе «подальше от предельно допустимых значений $A_j,\ j \in [1,m]$ и B».

Скалярная свертка уравнений связи и целевой функции по нелинейной схеме в данной формуле приведена в унифицированной форме. При необходимости дополнительные индивидуальные предпочтения ЛПР могут быть учтены введением весовых коэффициентов:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \{\alpha \sum_{j=1}^{m} \alpha_j A_j [A_j - \psi_j(x)]^{-1} + (1-\alpha) B[B - f(x)]^{-1}\}, \alpha_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$$

,

где $\alpha_j,\ j \in [1,m]$ – весовые коэффициенты, отражающие относительную важность выполнения соответствующих ограничений; α – весовой коэффициент, устанавливающий относительную важность для ЛПР противоречивых тенденций: выполнения ограничений и минимизации целевой функции.

ПРИМЕР. Задана целевая функция в виде эллиптического параболоида (Рис.2):

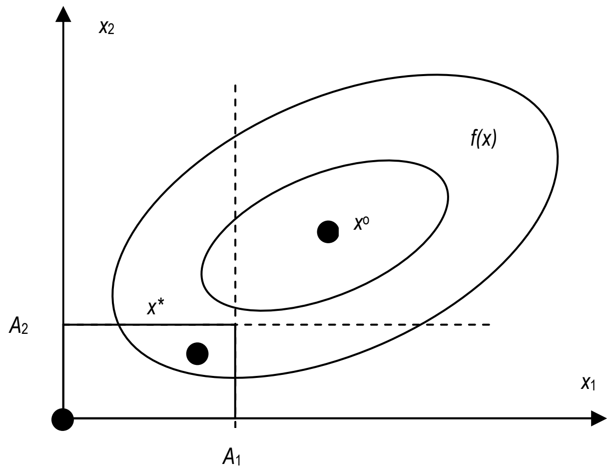

Рис. 2

$$f(x) = \frac{(x_1 - 6)^2}{2} + \frac{(x_2 - 5)^2}{4}$$

с минимумом в точке x^o=(6; 5). В пространстве (x_1, x_2) заданы уравнения связи (их пересечение дает начало координат) в виде ограничений $\psi_1(x) = x_1 = 0$ и $\psi_2(x) = x_2 = 0$, которые желательно выполнять строго, но ЛПР допускает отклонения в пределах $\psi_1 = x_1 \le A_1 = 4$ и $\psi_2 = x_2 \le A_2 = 3$.

Максимальная величина минимизируемой целевой функции достигается при строгом выполнении ограничений (в нашем примере в начале координат x_1, x_2=0) и составляет $f(x) \le B = 24{,}25 \approx 25$. ЛПР считает эту величину предельно допустимой.

<u>Ставится задача</u>: найти такие значения аргументов оптимизации $x_1{}^*$ и $x_2{}^*$, при которых требования минимизации целевой функции и выполнения ограничений удовлетворяются компромиссно.

Подставляем численные значения в выражение для компромиссной условной оптимизации в унифицированной форме (без весовых коэффициентов):

$$x^* = \arg\min_{x \in X}\{\frac{4}{4-x_1} + \frac{3}{3-x_2} + \frac{25}{25-[\frac{(x_1-6)^2}{2} + \frac{(x_2-5)^2}{4}]}\}.$$

Решить эту задачу можно и аналитически, выполнив безусловную минимизацию скалярной свертки. Однако в практических случаях аналитический расчет может оказаться громоздким. Обычно пользуются численными методами экстремизации функций, но гораздо удобней применить компьютерную программу.

Для решения широкого спектра оптимизационных задач разработана и изложена в работе [2] программа векторной оптимизации TURBO-OPTIM. Программа выполнена на языке Borland C++3.1 с использованием библиотеки Turbo Vision, что обеспечивает эффективное использование ресурсов ЭВМ, стандартизованную и удобную среду для пользователя, простоту модификации и отладки.

Для работы с программой необходимо выполнить следующие этапы:

– выделить набор частных критериев так, чтобы все они принимали неотрицательные значения и требовали *минимизации*;
– определить допустимое предельное значение для каждого критерия;
– выделить набор параметров (независимых переменных), от которых зависят частные критерии;
– определить диапазон изменения каждого параметра (минимальное, стартовое и максимальное значения);
– задать ограничения для параметров, имеющие вид неравенств $g_j(r) \le 0, j \in [1, k]$, где k – количество ограничений;
– определить вид зависимости частных критериев от параметров.

Программа позволяет решать задачи оптимизации для следующих случаев связи частных критериев с аргументами оптимизации (параметрами):

- критерии выражаются через параметры явно, известны аналитические зависимости;
- критерии являются некоторыми функционалами и для расчета их значений требуется решение системы дифференциальных уравнений;
- зависимости критериев от параметров не известны и для определения значений параметров необходимо проведение экспериментов;
- значения критериев можно получить, выполнив написанную пользователем программу;
- есть таблица зависимости частных критериев от параметров.

В каждом из перечисленных случаев программа представляет пользователю средства нахождения минимума обобщенного критерия, построенного по нелинейной схеме компромиссов, одним из методов оптимизации: 1) метод симплекс-планирования в модификации Нелдера-Мида и 2) нелокальный метод нелинейного программирования (дуальный метод оптимизации).

В соответствии с этапами работы с программой, устанавливаем: режим «Аналитика», метод оптимизации «Симплекс-планирование» (по умолчанию) и далее вводим числовые данные

$$x_{1\min} = 0; x_{1\text{start}} = 2; x_{1\max} = A_1 = 4$$

$$x_{2\min} = 0; x_{2\text{start}} = 2; x_{2\max} = A_2 = 3$$

$$y_{1\max} = \psi_{1\max} = A_1 = 4; y_{2\max} = \psi_{2\max} = A_2 = 3; y_{3\max} = f_{\max} = B = 25$$

Â ñ

После этого даем команду «Выполнить» и программа определяет искомые значения аргументов оптимизации: $x_1{}^* = 1{,}82$, $x_2{}^* = 0{,}45$ и компромиссно-оптимальное значение целевой функции $f(x)^* = 13{,}89$.

Заключение

Предложенный компромиссный метод позволяет обойтись без вспомогательной категории неопределенных множителей Лагранжа, используемой как при решении изопериметрических задач, так и в процедуре седловых точек Куна-Таккера. Обычно множители Лагранжа играют лишь вспомогательную, техническую роль и представляют собой побочный результат решения задачи условной оптимизации. Иногда даже незначительный отход от строгого выполнения ограничений (или от седловой точки) позволяет существенно улучшить целевую функцию. Возможность назначения допустимых пределов для изменения ограничений и целевой функции по физическим соображениям дает ЛПР дополнительные степени свободы при решении практических оптимизационных задач.

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теорий и приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Библиография

1. Воронин А.Н. Экспертные модели многокритериальной оптимизации // International Journal "Information Technologies & Knowledge" Vol. 5, Number 3, 2011. – P. 217-223.

2. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.

3. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 4. – С. 106-114.

Сведения об авторе

***Воронин Альберт Николаевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных информационных технологий Национального авиационного университета, проспект Комарова, 1, Киев-58, 03058 Украина; e-mail: alnv@voliacable.com*