ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОНЕЧНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Алексей Волошин, Владимир Кудин

Аннотация: *Выделяются два уровня моделирования – математический и машинный (компьютерный). Обсуждается проблема адекватности линейной аппроксимации математических и машинных моделей. Исследуется влияние конечно малых возмущений в элементах моделей на качество локализации области решений модели на основе методологии последовательного анализа вариантов и результатов проведенного вычислительного эксперимента с учетом уровня обусловленности систем и организации вычислений (длины мантиссы в представлении чисел).*

Abstract:*Two design level are selected– mathematical and machine. Adequacy problem of linear approximation of mathematical and machine models comes into question. Influence certainly of small indignations is probed in the models elements on localization quality of model area decisions on the basis of successive analysis variants methodology and results of the conducted calculable experiment taking into account the conditionality systems level and calculations organization (mantisi lengths are in numbers presentation).*

Keywords*: mathematical and machine design, linear approximation, small indignations, localization, successive analysis variants, conditionality systems.*

ACM Classification Keywords*: H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

Введение

Линейные модели (ЛМ) являются лишь первым приближением, локальной аппроксимацией, при исследовании процессов реального мира, который является в принципе нелинейным. Для хорошо обусловленных задач (даже в «гладкой» ситуации, а в некоторых случаях - и в «негладкой» [Кларк,1988]) существующий математический аппарат (анализ бесконечно малых) является основным инструментом при моделировании процессов «неживой и живой природы» и позволяет оценить влияние малых возмущений параметров на свойства модели лишь локально. Однако, во многих случаях аппроксимирующие линейные модели описываются в классе систем плохо обусловленных (некорректных), в частности, систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной и сильно заполненной матрицей ограничений [Самарский, 1989; Метьюз, 2001; Деммель, 2001]. Даже при небольшой размерности модели и при отсутствии структурных особенностей в матрице ограничений зависимости решения от возмущений аппроксимируются недостаточно адекватно (локализуются с помощью эллипсов с осями существенно различной длины или параллелепипедами с существенно разными границами на переменные). В частности, при исследовании экономических процессов во многих случаях результат моделирования представляется в виде системы линейных алгебраических неравенств (СЛАН) или как линейная оптимизационная модель. Известно, что категория плохой обусловленности является определяющий в построении зависимостей решений (и областей локализации) от возмущений в элементах модели [Самарский, 1989].

Опыт решения практических задач показывает, что характерной для математического моделирования является неадекватность модели и реального моделируемого процесса (упрощение явления, неточность задания параметров), а для вычислительного эксперимента - неадекватность математической и машинной модели (неустранимые ошибки, погрешности дискретизации, погрешности метода, округлений, усечений, потери значимых цифр, при выполнении операций). Округление чисел с точностью до фиксированного значения при вычислениях связано с приближенным представлением чисел с конечной (усеченной) разрядной сеткой (числа с фиксированной и плавающей запятой). «Классическая» непрерывность гарантирует существование локальной как угодно малой окрестности решения (проблемы необходимости определения решения с любой степенью точности сейчас не обсуждаются). В случае компьютерной (дискретной) модели окрестность решения не может быть меньше заранее заданного числа, а значит, не является корректной локальной аппроксимацией. Ошибки округления для таких вычислений могут характеризоваться относительной погрешностью. В ходе выполнения основных арифметических операций ошибки округлений могут накапливаться (в большей или меньшей мере). Существуют определенные отличия в схеме накопления ошибок при выполнении вычислений с фиксированными и плавающими числами. В совокупности они суммируются как погрешности вычислений [Самарский, 1989; Метьюз, 2001; Деммель, 2001].

Алгоритмы, которые реализуют конкретные методы, могут быть устойчивыми (погрешности в ходе вычислений накапливаются незначительно) и, соответственно, в противоположном случае - неустойчивыми. К алгоритмам, которые реализуют методы, можно предъявить две группы критериев: критерии адекватности моделей (дискретной машинной и математической непрерывной) и критерии сходимости вычислительных алгоритмов при увеличении числа уравнений в описании математической модели, быстродействия, точности вычислений. О проблемах неадекватности математической и машинной модели дает представление «феномен Рунге» [Метьюз, 2001], в котором при интерполировании Лагранжа погрешность аппроксимации растет при увеличении количества узлов (рис. 1).

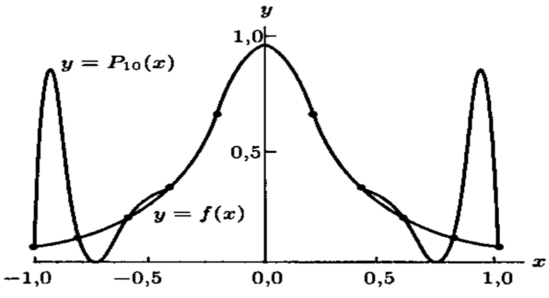

Рис. 1 Интерполяционный полином для функции $f(x)$ = 1/(1 + 12x2),

построенный по 11 равноудаленным узлам на интервале [-1; 1]

Со сходимостью алгоритмов связано такое понятие как корректность численного метода (непрерывная зависимость от входных данных, равномерная относительно количества уравнений). В частности, корректность, как устойчивость при изменениях входных данных в линейных системах, характеризуется как устойчивость от входных данных правых частей (обусловленность) и от всех элементов модели. Мера корректности задачи количественно описывается числом обусловленности [Метьюз, 2001]. Следует отметить, что категория корректности линейной системы (обусловленость задачи) проявляется на каждом шаге итерационного процесса.

В непрерывном случае основным критерием сходимости является монотонность и ограниченность оценок решения, в случае компьютерной модели «численная» монотонность и ограниченность «компьютерного» времени не гарантирует отсутствия “выбросов” в «реальном» будущем. Так, для функции $f(t) = e^{1/e} - |t-T|^{1/|t-T|}, t \neq T$, $f(t) = e^{1/e}, t = T$ (e - константа Эйлера) при достаточно большом T (например, равном 10^{100}) «численная» монотонность на промежутке [0; B] (в частности, на промежутке [A; B], A < B, реализуется «машинный нуль» при вычислении значений функции) дает «практические» основания считать, что $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, хотя это «детерминировано» не так ! (см. рис. 2, где e - константа Эйлера, $a = e^{1/e} - 1, b = e^{1/e}, A < B, B = T - e, C = T + e,$).

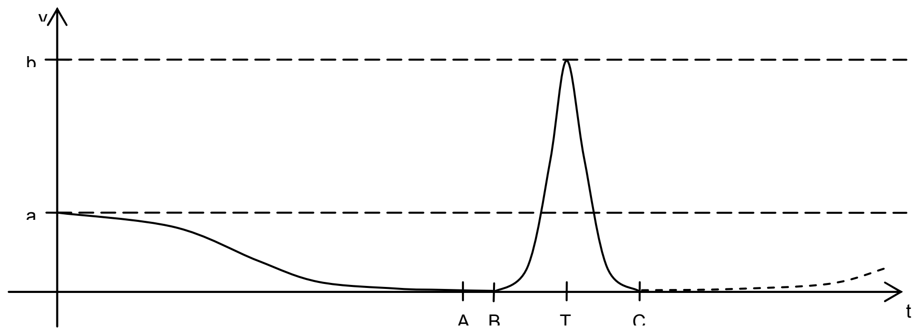

Рис. 2.

В условиях некорректности (за Адамаром) [Самарский, 1989] малые неточности представления математической модели, в частности, на уровне вычислительного алгоритма, могут существенно влиять на количественные и качественные характеристики получаемого решения при использовании конкретного метода (алгоритма) [Волошин, Кудин, 2010; Богаенко, Кудин, 2010]. Такие неточности чаще всего обусловлены ограниченностью длины мантиссы при представлении чисел с плавающей запятой (ошибки усечения, округления). Невзирая на наличие ЭВМ с эффективной организацией операции округления, в полной мере избежать их, или улучшить известные теоретические оценки, не удается. Важно отметить, что проведение вычислений с низкой точностью ("грубо") сглаживает ("прячет") некоторые важные детали. В таких случаях создается иллюзия неединственности решения (неполный ранг) для СЛАУ или совместимости области решений для СЛАН. Высокоточные вычисления раскрывают детали и чаще всего "дают" единственное решение (полный ранг матрицы) для СЛАУ и несовместимость для СЛАН. При проведении анализа вычислений с разной степенью точности важно согласовывать (согласовывать между собой) свойства грубых и высокоточных вычислений.

Метод базисных матриц

В данной работе проведено исследование зависимости качества локализации области принадлежности решений (или аппроксимации) от величины возмущений в элементах модели, от числа обусловленности (как определяющего фактора) и организации вычислений (от длины мантиссы в представлении чисел) для некоторых сравнительно простых задач. Акцентируется внимание на сложности построения аппроксимирующих (локализующих) множество решений. В основу исследований была положена методология последовательного анализа вариантов (ПАВ) [Волошин, 1987] и метод базисных матриц (МБМ), как его конкретная реализация [Волошин, Кудин, 2009, 2010]. МБМ позволяет учитывать влияние конечно малых возмущений на решения СЛАУ. В отличие от классических итерационных методов (например, симплекс-метода) МБМ находит решение в два этапа: 1) выделение базисной матрицы; 2) нахождение соответствующего выделенной базисной матрице решения СЛАУ и анализ обусловленности системы, что позволяет предусматривать ситуацию накопления ошибок.

В работе проводится:

– анализ свойств плохо обусловленных задач малой размерности;

– анализ типичных моделей средней размерности;

– исследование свойств алгоритмов на основе базисного метода;

– расчеты на основе вычислительных алгоритмов (без процедуры уточнения, с одно- и двухстадийной процедурой уточнения) при использовании разных типов данных (с плавающей запятой с мантиссой размерностью 64, 128, 256 бит) для СЛАУ с разными числами обусловленности;

– построены функциональные зависимости (интерполяционные многочлены) точности решения от используемых типов данных, алгоритмов и числа обусловленности системы.

Постановка задачи

Дана линейная модель:

$$Au = C \tag{1}$$

где матрица *A* (со строками $a_1, a_2, \dots, a_m$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$, $j = \overline{1, m}$) - квадратная размерностью $(m \times m)$, у которой вектор переменных $u = (u_1, u_2, .., u_m)^T$ и вектор ограничений $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$ имеют размерность *m*. Матрицы ограничений СЛАУ таких задач характеризуются в общем случае большой размерностью, сильной заполненностью и плохой обусловленностью.

В основу МБМ положена идея базисной матрицы. Базисные матрицы в процессе итераций изменяются последовательным замещением строк некоторой вспомогательной базисной матрицы (вспомогательной СЛАУ) строками ограничений модели (1).

Введем в рассмотрение векторы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ - нормали ограничений (будем называть их строками), $a_j u^T \le c_j$, $j \in J_б$, которые образуют матрицу $A_б$, где $J_б = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ - индексы ограничений.

Определение 1. Квадратную матрицу $A_б$, состоящую из m линейно независимых строк некоторой вспомогательной СЛАУ, будем называть искусственной базисной, а решение u_0 соответствующей ей системы уравнений $A_б u = C^0$, где $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T$ - искусственным базисным решением.

Определение 2. Две базисные матрицы, отличающиеся одной строкой, будем называть смежными.

Пусть e_{ri} - элементы матрицы $A_б^{-1}$, обратной к $A_б$, $e_k = (A_б^{-1})_k$ - k - ый столбец обратной матрицы, $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ - базисное решение, $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор разложения нормали ограничения $a_r u \le c_r$ по строкам базисной матрицы $A_б$, $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ - невязка r-го ограничения для u_0. Для строки a_l (нормаль ограничений $a_l u \le c_l$, $l \notin J_б$), $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$ - вектор разложения строки a_l по строкам базисной матрицы $A_б$,вектор которой находится из соотношения $a_l = \alpha_l A_б$.

Между коэффициентами разложения нормалей ограничений (1) по строкам искусственной базисной матрицы, элементами обратных матриц, базисными решениями, невязками ограничений (1) в двух смежных базисных матрицах при замене k -ой строки в базисной матрице $A_б$ строкой a_l имеют место соотношения [Волошин, Кудин, 2010]:

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \quad r = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}; \ i \ne k; \tag{2}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \quad r = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}; \ i \ne k; \tag{3}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}} \Delta_l, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ r = \overline{1,n}; \qquad r \ne k; \tag{5}$$

причем условием невырожденности базисной матрицы при замещении строкой a_l k -ой строки базисной матрицы $A_б$ является выполнение неравенства $\alpha_{lk} \ne 0$.

Для существования единственного решения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_{lk}^{(i)} \ne 0, \ i = \overline{1,m}$, где $\alpha_{lk}^{(i)}$ - ведущие элементы операции замещения строк базисной матрицы нормалями ограничений (1).

Матрица А системы (1) является невырожденной, если $\alpha_{lk}^{(i)} \ne 0, \ i = \overline{1,m}$.

В векторном виде формулы (3) можно представить как $\overline{e}_k = \dfrac{e_k}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_i = e_i - \dfrac{e_k}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \quad i = \overline{1,m}; \ i \ne k$.

Ниже приведены основные стадии алгоритмической схемы нахождения величины машинного ранга, базисной матрицы и решения (1) на основе известных свойств тривиальной СЛАУ той же размерности:

- проводим симплексные итерации по замещению строк тривиальной базисной матрицы с известными элементами метода строками ограничений системы (1), согласно с соотношениями (2)-(5);

- проверяем выполнение условий невырожденности на каждой итерации;

- находим соответствующие элементы метода: вектора разложения по строкам базисных матриц ограничений системы (1), обратную базисную матрицу, невязки ограничений, искусственные базисные решения $u_0^{(r)}$, где k - номер итерации;

- контролируем количество итераций k замещения строк вспомогательной системы строками основной системы (1), для которых выполняются условия невырожденности. Если количество итераций, для которых $\alpha_{kk}^{(k)} \neq 0$, равно m, единственное решение находится из соотношения: $A_б^{-1} \cdot C = u^0$. Если нет, то при выполнении условия $k < m$ для СЛАУ (1) не выполняется условие единственности решения. В этом случае модель требует дальнейшего анализа.

Вычислительный процесс пересчета обратной матрицы представляет собой проведение двух этапов матричных операций:

- деления ведущего k–го столбца $e_k = (A_б^{-1})_k$ на значение ведущего элемента $\alpha_{kk}^{(k)} \neq 0$ $e_k^{k+1} = e_k^k / \alpha_{kk}$;

- расчета на k-й итерации для i-го столбца обратной матрицы ($i \neq k,\ i \in I$) нового столбца $e_i^{k+1} = e_i^k - e_k^{k+1} \times \alpha_{ki}$, при этом качество локализации области возмущений решений (или аппроксимации) существенно зависит от числа обусловленности (как определяющего фактора) и от организации вычислений (от длины мантиссы в подаче чисел).

Вычислительный эксперимент по анализу малых возмущений ЛМ малой размерности

Влияние малых возмущений в "малых" ЛМ на качество локализации решений иллюстрируется на тестовом исследовании, которое структурно было организовано как многошаговая алгоритмическая процедура: построения последовательности модельных задач малой размерности со свойством плохой обусловленности с некоторого шага; нахождения на основе МБМ элементов метода; вычисления чисел обусловленности; графическое представление основных функциональных зависимостей.

Эксперимент демонстрирует количественно-качественные связи основных параметров модели и МБМ.

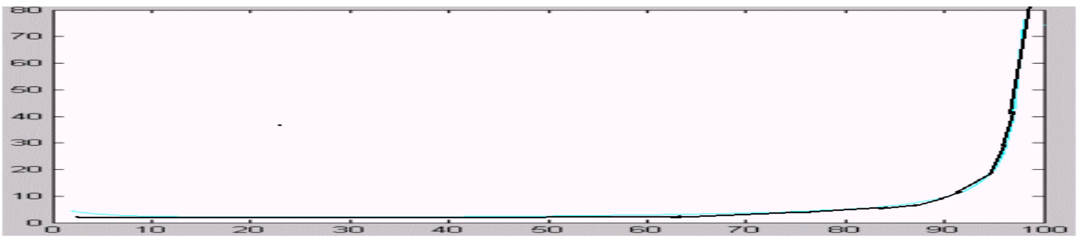

Рис. 3. Зависимость значений норм ведущих столбцов от номера итерации

Рис. 4. Зависимость значений чисел обусловленности от номера итерации

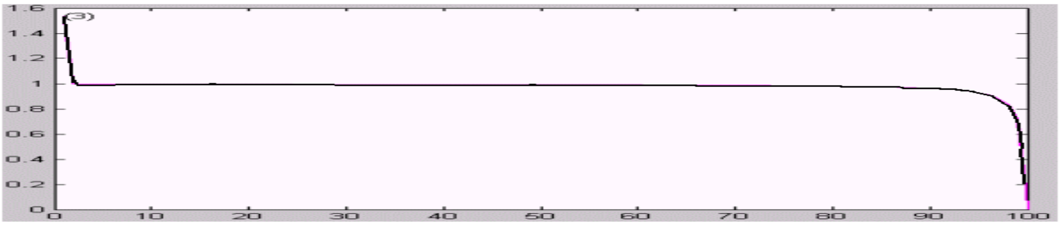

Рис. 5. Зависимость значений ведущих элементов от номера итерации

Ниже приведены полученные в результате эксперимента графические образы множеств принадлежности решений (локализация).

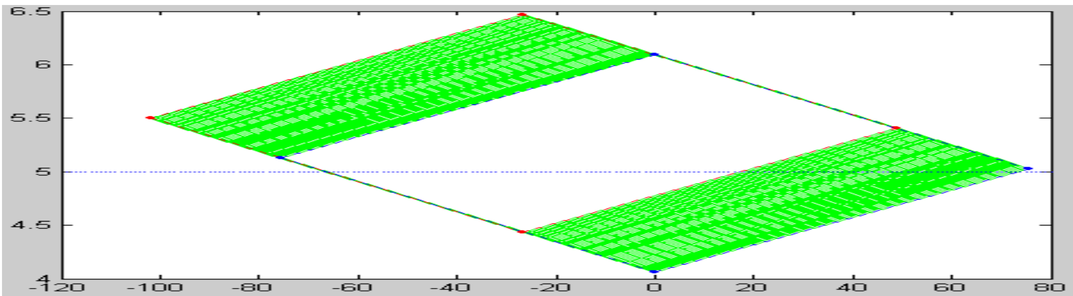

Рис. 6. Ромбовидные фигуры оценочных множеств принадлежности решений на итерациях метода (оси координат — компоненты вектора решений) при возмущениях типа „параллельный перенос"

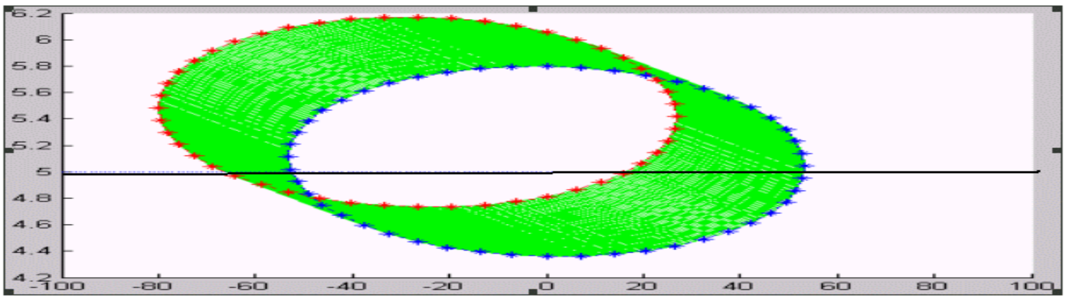

Рис. 7. Эллипсы принадлежности решений на итерациях метода при возмущениях вектора правых частей ограничений из сферы малого диаметра

Графические образы эллипсообразных фигур и ромбов (локализация) приведены в непропорциональном отношении минимума и максимума осей абсцисс и ординат. Эллипсообразные фигуры и ромбы образов возмущения множества решений (при малых возмущениях элементов модели) являются вытянутыми относительно многообразия решений граничной системы неполного ранга. Фигуры структурно включают в себя ‘‘большую ось” (диагональ) и “малую”. Большая ось отвечает большему собственному числу по оси абсцисс, малая (с малыми значениями диагонали по оси ординат) - отвечает малому собственному числу.

Рис.6, 7 в определенной степени подтверждает гипотезу, высказанную одним из соавторов статьи, о справедливости принципа неопределенности Гейзенберга при компьютерном исследовании влияния конечно малых возмущений – уменьшение неопределенности («улучшение» локализации) по одной переменной приводит к увеличению неопределенности («ухудшению» локализации) по другой.

Вычислительный эксперимент по анализу малых возмущений в ЛМ средней размерности

Для вычислительного эксперимента были избраны три процедуры МБМ: без уточнения решения (0), с одностадийным (1) и двух стадийным (2) уточнением [Волошин, Кудин, 2010], применялись разные типы данных: числа с плавающей запятой (двойной точности (Double), 128-битовые числа (Dd) и 256- битовые числа (Qd), а также вычисления в точных числах. Стоит отметить, что на одной и той же вычислительной платформе отношение быстродействия алгоритмов, что используют разные типы данных, будет постоянным. Данные вычислительных экспериментов показали, что на избранной для тестирования платформе, алгоритм, который использует 128-битовые числа, был в ~35 раз медленнее, чем алгоритм, который использует 64-битовые числа, а в случае 256-битовых чисел - в~450 раз медленнее. Такое существенное замедление объясняется тем, что операции с числами с плавающей запятой большого размера не реализованы аппаратно, в отличие от операций над 64-битовыми числами.

Для построения эвристических зависимостей между точностью решения и числом обусловленности была проведенная серия вычислительных экспериментов. Использованная для тестирования аппаратная платформа - процессор AMD Athlon64 с реальной тактовой частотой 1.8Ghz, 512Mb оперативной памяти. Проводилось решение СЛАУ размерностью 256x256 различными алгоритмами МБМ. В качестве критерия точности бралась точность машинного решения u_0 системы (1) по сравнению с аналитическим (точным) решением *u=(1,0…,0)*, $\varepsilon = \left\| u_0 - (1,0,...0) \right\|$. Полученные экспериментальные данные приведены ниже в табл.1. На основе этих данных (и данных при других размерностях) построены зависимости точности решения от числа обусловленности (Рис.9), 0, +1, +2 - количество итераций уточнения, $log_{10} c$ - порядок числа обусловленности системы, $\log_{10} \varepsilon$ - порядок точности решения.

Таблица 1. Зависимость порядка точности решения $\varepsilon \left(\log_{10} \varepsilon\right)$ от числа обусловленности (*m*=256)

$\log_{10} c$	6	7	8	9	10	11	12
double+0	15.81	12.29	8.89	2.75			
dd+0	46.16	42.45	39.07	34.66	32.50	27.71	22.33
qd+0	113.35	107.94	104.76	100.43	96.25	93.69	86.65
double+1	12.40	10.55	5.37	2.70			
dd+1	45.92	43.43	36.86	31.96	29.12	26.33	22.43
qd+1	109.58	108.57	103.25	95.93	93.22	91.00	87.99
double+2	10.85	8.55	6.75	2.27			
dd+2	44.41	42.15	36.89	32.16	31.15	26.44	21.90
qd+2	101.21	106.73	107.70	100.30	93.89	87.59	86.52

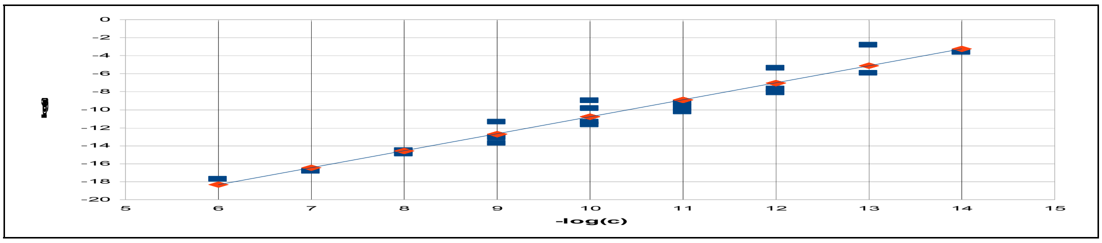

Рис. 8. Зависимость порядка точности $\varepsilon\ (\log_{10}\varepsilon\ )$ от числа обусловленности.

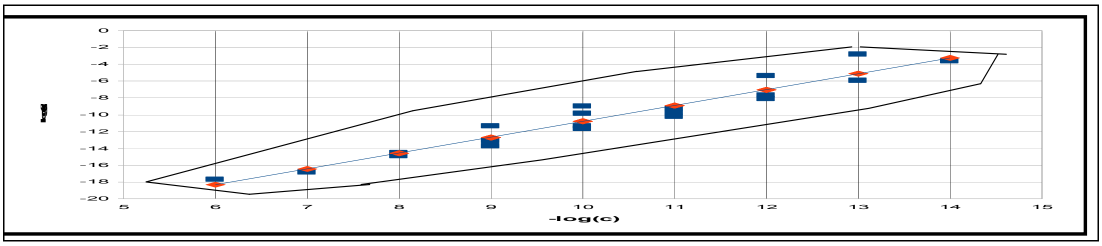

Рис. 9. Вариант кусочно-линейной аппроксимации (локализации) области значений порядка точности $\varepsilon\ (\log_{10}\varepsilon\ )$ в системе координат значений порядка точности и порядка числа обусловленности.

Вычислительный эксперимент установил близкие к линейной зависимости: 1) точности решения (и обращения матрицы) от числа обусловленности (при фиксированном типе данных и алгоритме) и размерности модели; 2) точности решения от типа данных (при фиксированном числе обусловленности и алгоритме), что позволяет строить: 1) интерполяционные многочлены - зависимости точности решения от обусловленности; 2) аппроксимирующие множества принадлежности точности решений (в том числе, эллипсы минимальной площади); 3) экстраполяционные зависимости (для точности решений алгоритмов) от числа обусловленности.

Методология ПАВ [Волошин, 1987] направлена на проведение исследований по установлению статуса компонент модели, анализа включений (исключений) компонент модели на ограниченность и замкнутость (то есть на качество локализации). Как следует из результатов вычислительного эксперимента, даже незначительные количественные изменения в компонентах таких моделей могут качественно изменить статус компонент модели и, как следствие, структуру множества решений задачи. При исследовании устойчивость задачи важно выявить количественную меру изменений исходных данных (корректность) при которых это свойство хранится (теряется) и значения параметров, при которых происходят качественные изменения свойств системы. "Поймать и оценить" такие структурные зависимости качественных параметров от количественных (в малом) между практической задачей математическим и машинным описанием модели, например, на языке "$(\varepsilon-\delta)$" - оценки отклонения или изменения решений - от изменения данных в пределах (категория устойчивости) не только трудно , но, чаще всего, и невозможно даже для плохо обусловленных задач малой размерности. Определять и устанавливать количественное значение плохой обусловленности системы сама по себе тоже сложная задача [Волошин, Кудин, 2009, 2010].

В качестве вывода можно отметить необходимость включения в процесс проведения численного эксперимента лица, принимающего решение, для анализа влияния различных стратегий проведения вычислений (типов данных, алгоритмов, уровня обусловленности системы) на основные параметры решения (точность самого решения и обращения матриц, быстродействие, объемы вычислений), разработки эффективных вычислительных схем методов и алгоритмов, оценивающих обусловленность системы в ходе эксперимента по отмеченным критериям на моделях различной размерности.

Заключение

Данная работа продолжает (и в определенном смысле обобщает) исследования влияния конечно малых возмущений линейных моделей [Волошин,Кудин,2009,2010] и акцентирует внимание на необходимости разработки «анализа конечно малых» как инструментария анализа компьютерных моделей.

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.itea.org, www.foibg.com).

Список литературы

[Кларк, 1988] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ.-М.:Наука, 1988.-280 с.

[Самарский, 1989] Самарский А.А., Гулин А.Г. Численные методы.- М.: Наука, 1989. - 432с.

[Метьюз, 2001] Метьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы.-Москва-С.-Петербург-Киев: Вильямс, 2001.-703с.

[Деммель, 2001] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение - М.: Мир, 2001,-430с.

[Волошин, 1987] Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования // Доклады АН СССР,1987,том 293,№3.-С.549-553.

[Кудин, 2002] Кудин В.И. Застосування методу базисних матриць при дослідженні властивостей лінійної системи // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. - 2002. - 2. - С. 56-61.

[Волошин, Кудин, 2009] Волошин А., Кудин В., Богаенко В. Анализ малых возмущений линейных экономико-математических моделей // Information Science & Computing, N 10, Vol. 3, SOFIA, 2009.-P. 67-73.

[Волошин, Кудин, 2010] Волошин А, Кудин В., Кудин Г. Методы анализа малых возмущений линейных моделей // Natural and Artificial Intelligence, ЇTHEA, Sofia, 2010. - P. 41-47.

[Кудин, 2010] Кудин В., Богаенко В. О принятии решений при анализе малых возмущений линейных моделей // Information Models of Knowledge, ITHEA, Kiev-Sofia, 2010. - P. 226-231.

Информация об авторах

Алексей Ф. Волошин, *Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, д. т. н., профессор, E-mail: olvoloshyn@ukr.net*

Владимир И. Кудин, *Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, д. т. н., с. н. с., E-mail: V_I_Kudin@mail.ru*