

## ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ РЕАКТОРОВ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Евгений Забудский

**Abstract:** *Based on J. Cl. Maxwell field theory and finite elements method a generalized mathematical model as well as its algorithm and software implementation have been developed. An anatomy (internal structure) of the controlled electro-magnetic reactors has been investigated based on the model, algorithm and SW. The correlations between design and circuit features of the devices and their differential characteristics have been determined; project decisions targeting device optimization have been made.*

*Graphical Interpretation of the Magnetic Filed Calculation Results for Electro-Magnetic Devices computer animation has been developed. The animation visually presents the results of simulation and is available at the author's web-page (<http://zei.narod.ru>). It is also used as a student study guide for the Theoretical Basis of Electrical Engineering and Electrical Machines courses.*

**Ключевые слова:** *управляемый реактор, магнитное поле, метод конечных элементов, web-сайт.*

**ACM Classification Keywords:** *G.1.8 Partial Differential Equations — Finite element methods.*

---

### Введение

---

По конструктивным и схмотехническим решениям управляемые электромагнитные реакторы подобны силовым трансформаторам или электрическим машинам переменного тока с неявновыраженными полюсами, но с неподвижным “ротором” (далее кавычки опущены).

Реактор — это статическое силовое нелинейное устройство, работа которого основана на явлении электромагнитной индукции. Активная часть реактора содержит одну или несколько обмоток и магнитопровод, выполненный из электротехнической стали. В реакторе могут быть следующие обмотки: рабочая обмотка (РО), предназначенная для включения в электрическую сеть, в которой используется индуктивность реактора; обмотка управления (ОУ), предназначенная для создания управляющего постоянного магнитного поля; вспомогательные обмотки (компенсационная и / или фазосдвигающая). Компенсационная обмотка обеспечивает компенсацию высшей гармоники в индукции магнитного поля; фазосдвигающая - сдвиг по фазе векторов магнитодвижущей силы (МДС) стержней магнитопровода.

Реактивная мощность, потребляемая реактором, плавно регулируется за счет изменения насыщения (магнитного сопротивления) его магнитопровода. Являясь средством автоматического регулирования этой мощности, реакторы предназначены для управления режимами электроэнергетических систем с целью решения следующих задач: компенсация избыточной зарядной мощности линий электропередачи и повышение их пропускной способности, ограничение коммутационных перенапряжений, ограничение токов короткого замыкания, уменьшение колебаний напряжения, рациональное распределение напряжения и тока и др.

Технико-экономические показатели реакторов должны удовлетворять следующим требованиям: практическая синусоидальность регулируемого тока, отсутствие индуктивных связей между обмотками и достаточное быстродействие, пониженная материалоемкость, технологичность и др.

---

## 1. Общая математическая модель электромагнитного поля реакторов

---

*“War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb?  
Die mit geheimnisvoll verborg’nem Trieb  
die Kräfte der Natur um mich enthüllen  
und mir das Herz mit stiller Freude füllen.”*  
Aus Goethe’s, “Faust”

Все электромагнитные явления, которые рассматриваются при анализе управляемых реакторов, описываются четырьмя уравнениями Максвелла в частных производных. Эти уравнения он сформулировал и опубликовал в 1873 году в “Трактате об электричестве и магнетизме”. С учетом принятых допущений, обусловленных спецификой управляемых реакторов, уравнения в векторной форме при использовании вектора-оператора набла  $\nabla$  записываются в виде:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ или } = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы напряженности и индукции магнитного поля, А/м и Тл;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — векторы напряженности и индукции электрического поля, В/м и Кл/м<sup>2</sup>;  $\rho$  — объемная плотность электрического заряда, Кл/м<sup>3</sup>; символы “ $\times$ ” и “ $\cdot$ ” — знаки операций соответственно векторного и скалярного произведения векторов. В декартовой системе символический вектор-оператор  $\nabla$  представляется в виде  $\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$ , где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы в декартовой системе координат.

Уравнения (1) и (2) отражают взаимосвязь между магнитным и электрическим полями; (3) и (4) — это уравнения непрерывности магнитного и электрического поля.

В уравнении (2) вектор плотности тока проводимости определяется как  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{тр}} + \mathbf{J}_{\text{ст}} = \gamma \mathbf{E} + \gamma \mathbf{E}_{\text{ст}}$ , где 1-е слагаемое обусловлено изменением модуля вектора магнитной индукции во времени; 2-е слагаемое — это плотность стороннего тока, подводимого извне;  $\gamma$  — удельная электрическая проводимость, См/м.

Используемые в практике управляемых электромагнитных реакторов диапазоны скоростей, частот и линейных размеров позволяют полностью пренебречь токами смещения.

Электромагнитное поле реакторов, создаваемое электрическим током проводимости, изменяющимся во времени (без учета тока смещения) является квазистационарным. Магнитное поле, создаваемое постоянным электрическим током проводимости — стационарным.

Условие квазистационарности заключается в том, чтобы любой линейный размер  $l$  области расчета поля в реакторах был много меньше длины электромагнитной волны  $\lambda$ ,  $l \ll \lambda$ . Для реакторов это условие полностью выполняется, так как при частоте  $f = 50$  Гц, длина электромагнитной волны в воздухе составляет  $l = c/f = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6000$  км. В этом случае эффектом запаздывания фазы, являющимся результатом наличия токов смещения и излучения энергии, можно пренебречь, поэтому во всех сечениях последовательно соединенных участков цепи мгновенные значения тока для данного момента времени практически одинаковы.

Уравнения (1) — (4) дополняются материальными уравнениями  $\mathbf{D} = \epsilon_a(\mathbf{E})\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_a(\mathbf{H})\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{T})\mathbf{E}$ , записанными для изотропной и нелинейной среды. Они характеризуют макроскопические свойства среды

посредством диэлектрической  $\epsilon_a(\mathbf{E})$  и магнитной проницаемости  $\mu_a(\mathbf{H})$  и удельной электрической проводимости  $\gamma(T)$ , где  $T$  — температура среды.

Для учета нелинейности кривой намагничивания электротехнической стали использован аппарат кубических сплайнов, который обеспечивает достаточную точность аппроксимации, а также существование дифференциальной кривой намагничивания.

Общая модель электромагнитного поля Максвелла полностью описывает все электромагнитные явления в управляемых электромагнитных реакторах, однако при анализе конкретных устройств общая модель может принимать частные, более простые, но практически важные формы. К таким частным моделям относятся: модель стационарного магнитного поля постоянного тока, модель квазистационарного электромагнитного поля переменного тока, модель электростатического поля и др.

## 2. Частные модели Максвелла

### 2.1. Векторная магнитостатическая модель

Эта модель справедлива для реакторов, в которых поле создается электрическим постоянным током проводимости и / или фиксированным мгновенным значением переменного тока. Так как производная  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  в уравнении (2) равна нулю, то электрическое и магнитное поля являются независимыми и общая модель электромагнитного поля записывается для магнитного поля в изотропной и нелинейной среде в следующем виде:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = f(\mathbf{H}) \mathbf{H}. \quad (7)$$

Условие непрерывности магнитного поля (6) позволяет ввести в рассмотрение вспомогательную векторную функцию  $\mathbf{A}$ , которая определяется соотношением  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

Эта функция зависит от пространственных координат и называется векторным магнитным потенциалом. Определение функции  $\mathbf{A}$  в виде соотношения  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  вполне допустимо, так как при этом не нарушается условие непрерывности силовых линий магнитного поля, то есть  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ . По определению вектор  $\mathbf{A}$  является многозначной функцией. В связи с многозначностью на вектор  $\mathbf{A}$  накладывается дополнительное условие, называемое калибровочным условием Кулона. Оно имеет вид  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

Такая калибровка магнитного потенциала позволяет упростить конечное уравнение, которое является результатом *аналитического* преобразования векторной магнитостатической модели и непосредственно используется для расчета магнитного поля [1]. Для изотропной и нелинейной в магнитном отношении среды ( $\mu_a = f(\mathbf{H})$ ) это уравнение записывается в виде

$$\nabla \times ((1/\mu_a) \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (v_a \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}. \quad (8)$$

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение (8) представляется как

$$\partial(v_a \partial \mathbf{A} / \partial x) \partial x + \partial(v_a \partial \mathbf{A} / \partial y) \partial y + \partial(v_a \partial \mathbf{A} / \partial z) \partial z = -\mathbf{J}(x, y, z). \quad (9)$$

Для получения однозначного решения (8) необходимо задаться граничными условиями – условиями существования поля на внешней границе области расчета [1].

При выполнении граничных условий, уравнения в частных производных имеют единственное решение. В результате определяются искомые составляющие потенциала  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  в каждой точке области. Если область достаточно протяженная, то задача может быть сведена к двумерной. Это справедливо для всех реакторов подобных электрическим машинам переменного тока с неявновыраженными полюсами. При совмещении оси  $Oz$  с осью ротора таких реакторов, векторный магнитный потенциал и вектор плотности тока имеют только по одной составляющей - аппликате. В этом случае векторное уравнение (8) решается в скалярной форме

$$\nabla \times ((1/\mu_a) \nabla \times A_z) = \nabla \times (v_a \nabla \times A_z) = J_z. \quad (10)$$

Уравнение (10) содержит только одну неизвестную, проекцию  $A_z$ , и в декартовой системе координат записывается в виде

$$\partial(v_a \partial A_z / \partial x) \partial x + \partial(v_a \partial A_z / \partial y) \partial y = -J_z(x, y). \quad (11)$$

После определения распределения потенциала  $A_z(x, y)$  находятся вектора поля, которые расположены в плоскости перпендикулярной оси  $Oz$ . В частности составляющие вектора магнитной индукции определяются на основе следующих выражений  $B_x = \partial A_z / \partial t$ ,  $B_y = -\partial A_z / \partial t$ .

При двумерной постановке задачи линии равного потенциала  $A_z(x, y) = \text{const}$  совпадают с силовыми линиями магнитного поля. При рассмотрении трехмерной задачи для определения векторов поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в каждой точке области расчета необходимо решить три скалярных уравнения, а для двумерной задачи - лишь одно уравнение (11). Решение двумерной задачи существенно проще, как по затратам труда при составлении компьютерной программы, так и с точки зрения расхода машинного времени, требований предъявляемых к оперативной памяти, наглядности графической интерпретации исходных данных и результатов расчета и др.

## 2.2. Магнитодинамическая модель

Данная модель применяется для описания реакторов, когда ток проводимости, создающий электромагнитное поле, изменяется во времени. С учетом принятых допущений магнитодинамическая модель совпадает с общей моделью электромагнитного поля (1) — (4). Производная  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  в уравнении (2) не равна нулю, электрическое и магнитное поле связаны между собой посредством вихревого тока. При использовании понятия магнитного потенциала и калибровки Кулона модель, представленная уравнениями (1) — (4), аналитически преобразуется к одному векторному уравнению в частных производных

$$\nabla \times ((1/\mu_a) \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (v_a \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} - \gamma \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad (12)$$

где  $\gamma \partial \mathbf{A} / \partial t$  — вектор плотности вихревого тока [1].

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение (12) представляется как

$$\partial(v_a \partial \mathbf{A} / \partial x) \partial x + \partial(v_a \partial \mathbf{A} / \partial y) \partial y + \partial(v_a \partial \mathbf{A} / \partial z) \partial z = -\mathbf{J}(x, y, z, t) + \gamma \partial \mathbf{A} / \partial t. \quad (13)$$

Для однозначности решения (12) необходимо наряду с граничными условиями, задать условие Коши, то есть значения векторного магнитного потенциала во всей области расчета в начальный момент времени  $t = 0$  [1].

Из решения (12) определяются распределение потенциала  $A(x, y, z, t)$ , на каждом временном слое во всей пространственной области расчета, и вектора поля. Решения на смежных временных слоях связаны между собой посредством вихревого тока. Если вихревой ток не учитывается, то решение представляется в виде совокупности распределений потенциала на различных временных слоях,

которые взаимнонезависимы, но определены для различных мгновенных значений тока (вектор плотности тока  $\mathbf{J}$ ) в соответствии с заданным шагом изменения временной координаты.

### 3. Основные положения метода конечных элементов для решения уравнений Максвелла, моделирующих магнитное поле в управляемых реакторах

Для решения уравнений математической физики в частных производных (8) и (12) использован метод конечных элементов (МКЭ). Метод применим для геометрически сложных областей, неоднородных и нелинейных сред, которые имеют место в управляемых реакторах.

Основная идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину, каковой является векторный магнитный потенциал  $A(x,y,z,t)$ , аппроксимируют в пространстве дискретной моделью следующим образом [1]:

1) в рассматриваемой области фиксируется конечное число точек, называемых узловыми точками; 2) значение потенциала в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена; 3) область существования потенциала разбивается на конечное число подобластей, называемых конечными элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и их совокупность, составляющая ансамбль конечных элементов, аппроксимирует форму области; 4) потенциал аппроксимируется в каждом элементе полиномом, который определяется с помощью значений этой функции в узловых точках. Для каждого элемента определяется свой полином, но полиномы подбираются так, чтобы сохранялась непрерывность потенциала вдоль границ конечного элемента.

В соответствии с методом конечных элементов формируется система нелинейных алгебраических уравнений (НАУ), которая в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) &= 0, \\ f_2(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $n$  — число тех узловых точек в ансамбле конечных элементов, в которых необходимо определить неизвестные значения векторного потенциала  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Для решения системы НАУ (14), описывающей распределение поля в управляемых реакторах, принят метод Ньютона, который за ограниченное число итераций (как правило не большее 10 при решении нелинейной задачи), позволяет найти с заданной точностью неизвестное значение векторного магнитного потенциала.

На основе выполненного вычислительного эксперимента установлено, что при нелинейностях, которые имеют место в управляемых реакторах метод Ньютона, как правило, всегда обеспечивает сходимость решения к искомому результату практически для любых реальных областей расчета реакторов и их исходных данных.

Согласно методу Ньютона на каждой итерации решения системы НАУ решается система линейных алгебраических уравнений (ЛАН) в которой: матрица коэффициентов — это матрица частных производных (якобиан) от каждого из уравнений системы (14) по искомым значениям потенциала в узлах ансамбля; вектор-столбец свободных членов — это вектор невязок, элементы которого определяются по уравнениям системы (14); вектор-столбец искомых — это вектор поправок к значениям потенциала, найденным на предыдущей итерации  $k$  метода Ньютона.

Уточненное значение векторного магнитного потенциала в узлах ансамбля, соответствующее  $(k+1)$ -й итерации, определялось на текущем временном интервале  $\Delta t$  как сумма значений векторного потенциала, найденных на предыдущей итерации  $k$ , с вектором поправок.

---

---

Итерационный процесс на данном временном интервале  $\Delta t$  прекращался, когда элементы вектора невязки становились меньше некоторой заданной малой величины — точности расчета.

Далее осуществлялся переход на следующий временной интервал и решение, полученное на предыдущем временном интервале, принималось в качестве начального значения для определения распределения потенциала на последующем временном интервале. Вычислительный процесс продолжался до тех пор, пока не будет пройден с заданной точностью весь отрезок времени.

Пространственные распределения потенциала, рассчитанные на смежных временных интервалах, взаимно связаны через посредство вихревого тока.

По результатам решения системы уравнений (14) на основе найденного пространственно-временного распределения потенциала  $A(x,y,t)$  выполнено следующее: 1) рассчитаны величины магнитной индукции  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B$ , магнитной напряженности  $H$  и относительной магнитной проницаемости  $\mu_a/\mu_0$  в каждом конечном элементе на всем заданном количестве интервалов времени  $\Delta t$ ; 2) построены линии равного потенциала  $A(x,y) = \text{const}$ , при  $t = \text{const}$ , которые являются также силовыми линиями магнитного поля; 3) осуществлен поиск зон области расчета с максимальной магнитной индукцией; 4) построены зависимости  $A = f(t)$ ,  $B = f(t)$ ,  $H = f(t)$  и  $\mu_a/\mu_0 = f(t)$ , соответствующие заданным конечным элементам, и выполнен гармонический анализ кривых; 5) построены для заданного фиксированного момента времени  $t = \text{const}$  двумерные поверхности  $A = f(x,y)$ ,  $B = f(x,y)$ ,  $H = f(x,y)$  и  $\mu_a/\mu_0 = f(x,y)$ ; 6) установлены рациональные размеры участков магнитопровода с учетом из насыщения; 7) приняты проектные решения оптимизирующие активную часть реакторов.

---

#### 4. Анализ результатов моделирования магнитного поля в управляемых реакторах и их оптимизация

---

---

##### 4.1. Насыщающийся реактор трансформаторного типа с пульсирующим полем

---

Реактор предназначен для работы в схеме параметрического стабилизатора напряжения (ПСН) с целью ограничения колебаний напряжения, которые обусловлены нагрузкой. Он также может быть использован для компенсации избыточной реактивной мощности энергосистемы в схеме статического компенсатора реактивной мощности (СКРМ). Схемы ПСН и СКРМ практически одинаковы, разные названия их отражают различные целевые функции использования устройства.

Параметрический стабилизатор напряжения (ПСН) состоит из трех основных элементов: регулирующее устройство — его функции выполняет трехфазный насыщающийся реактор (НР); две нерегулируемые батареи конденсаторов — шунтовая  $C_{ш}$  и серийная  $C_s$ . На рис. 1,а,б показаны, соответственно, принципиальная схема параметрического стабилизатора напряжения и его вольт-амперная характеристика. ПСН должен выдавать или поглощать реактивную мощность в точке его подключения так, чтобы обеспечить практическое постоянство напряжения. НР обладает практически безынерционным принципом действия, что и делает особенно эффективным его использование для стабилизации напряжения в сети с резкопеременной нагрузкой.

Разработан трехфазный НР активная часть которого состоит из магнитопровода и одной совмещенной трехфазной обмотки (рис. 2). Активная часть выполнена в виде трех одинаковых модулей, которые соединены между собой электрически. Модуль содержит трехстержневой, бронестержневой сердечник и пять катушек разных фаз обмотки. Каждая фаза состоит из пяти последовательно соединенных катушек. Катушки с числами витков  $W_6$  и  $W_c$  являются основными, а катушки с числом витков  $W_m$  — фазосдвигающими. Таким образом, совмещенная обмотка выполняет функции двух обмоток: рабочей и фазосдвигающей. Принятые соотношение чисел витков катушек фаз, схема соединения катушек и расположение их на стержнях обеспечивают

исключение из тока обмотки гармоник с номерами 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; 21, 23, 25, 27, 29, 31,... Нечетные гармоники, оставшиеся некомпенсированными, имеют номера 17, 19; 35, 37,... Вследствие пониженного содержания гармоник подобный НР является часто используемым типом реакторов.

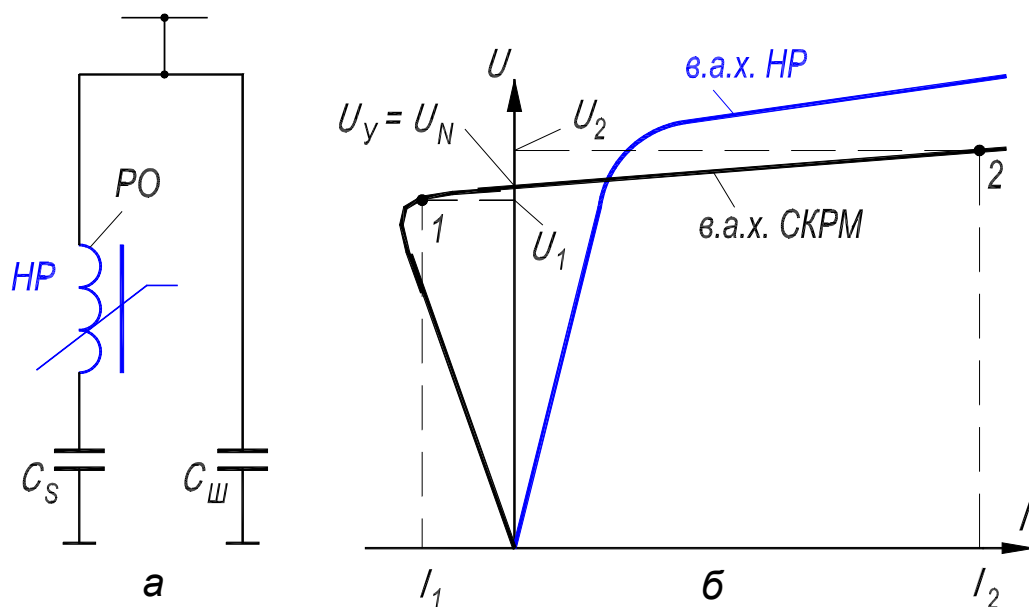


Рис. 1. Принципиальная схема статического компенсатора реактивной мощности (СКРМ) — (а);  
вольт-амперная характеристика (в.а.х.) — (б)

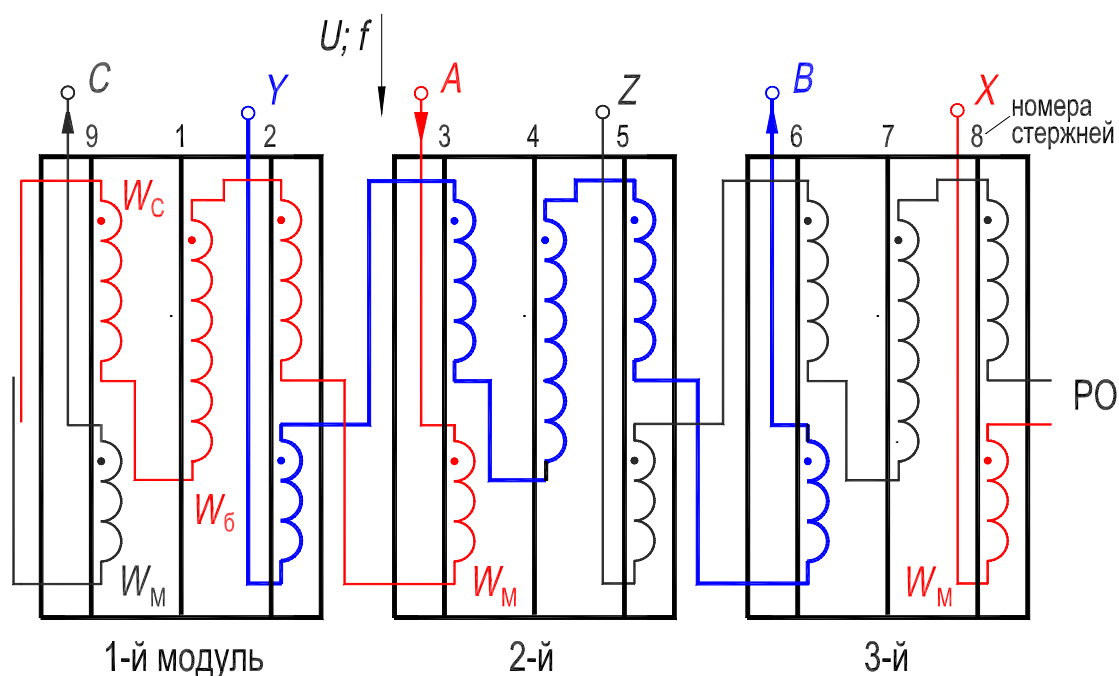


Рис. 2. Электромагнитная схема трехфазного насыщающегося реактора (НР)  
с пятью катушками в фазе рабочей обмотки (ПО):

$$W_M : W_C : W_6 : W_C : W_M = 0,395 : 0,743 : 1 : 0,743 : 0,395$$

Квазистационарное электромагнитное поле, реально существующее в НР, описывается уравнением (12). Однако решить это уравнение, то есть рассчитать трехмерное магнитное поле с учетом изменения его во времени не представляется возможным из-за ограниченных возможностей вычислительной техники. Поэтому рассчитывается двумерное магнитное поле в НР: 1) для фиксированного момента времени (стационарное поле), 2) с учетом изменения его во времени (квазистационарное поле); влияние вихревых токов не учитывается, кривая намагничивания принимается однозначной.

Особенностью реактора является глубокое насыщение стали магнитопровода. Значение магнитной индукции в стержнях магнитопровода в рабочем диапазоне, соответствующем участку 1—2 в.а.х. (рис. 1,б), составляет  $\approx 2$  Тл, поэтому вытеснение и рассеивание магнитного потока может достигать заметных значений и возможна перегрузка отдельных участков магнитопровода в магнитном отношении. Исследование этих и других вопросов и оптимизация активной части составили цель расчета электромагнитного поля в НР.

Так как активная часть НР состоит из трех одинаковых модулей, то рассматривается один модуль (1-й на рис. 2), причем, в силу симметрии область расчета включает 1/2 часть его, расположенную выше горизонтальной оси симметрии, рис. 3.

Расчетная модель НР (двумерная область расчета ABCD на рис. 3) состоит из 3-стержневого магнитопровода с боковыми и торцевыми ярами, 3-х катушек фазы А-Х с числами витков  $W_c$  и  $W_b$ , одной катушки фазы В-У с числом витков  $W_m$  и одной катушки фазы С-З также с числом витков  $W_m$  (1-й модуль на рис 2).

Кроме того, в область расчета входит немагнитное околоярмовое пространство и пространство окон магнитопровода. Соотношение ширины прямоугольников на области расчета, которые соответствуют катушкам фаз, определяется соотношением чисел витков катушек. Ширина пластин стержней магнитопровода в области расчета — 0,1 м, а принятая, начальная, ширина ярем — 0,08 м, длина полустержней — 0,37 м.

Область ABCD непрерывного распределения магнитного поля аппроксимирована ансамблем из 8120 двумерных конечных элементов 1-го порядка и включает 4212 узлов (рис. 3,б). На внешних границах области расчета АВ, ВС и CD, с которыми совпадает некоторая силовая линия магнитного поля, задано граничное условие Дирихле,  $A = 0$ , а на границе DA, совпадающей с осью симметрии, задано однородное граничное условие Неймана,  $\partial A / \partial n = B_\tau = 0$ .

Стационарное магнитное поле рассчитывалось для момента времени  $t_1$ , которому соответствуют мгновенные значения токов фаз  $i_a = I_{ам}$ ,  $i_b = i_c = -I_{ам} / 2$  (рис. 4). Направление токов в катушках фаз обмотки НР, соответствующее моменту времени  $t_1$ , показано на рис. 3 знаками "x" и "•". Квазистационарное поле рассчитывалось с шагом  $\Delta t = 0,02$  с / 120 в интервале времени 0—0,03 с.

Система нелинейных алгебраических уравнений вида (14) состоит из 4025 уравнений. Искомым является распределение векторного магнитного потенциала  $A(x,y)$  в узлах ансамбля КЭ. Система НАУ решалась методом Ньютона. Система линейных алгебраических уравнений (ЛАУ), формируемая программно на каждой итерации решения системы НАУ, решалась методом Гаусса, при этом учитывалось, что ширина диагональной полосы матрицы коэффициентов (якобиана) системы ЛАУ, в пределах которой находятся ненулевые элементы якобиана, равна 38. Общее число элементов в строке якобиана составляет 4025. Учет соотношения (38 и 4025) обусловил существенное сокращение времени решения задачи, которое при заданной точности решения системы НАУ составило для стационарного поля несколько минут, и было получено за 8—10 итераций.

Для уменьшения ширины диагональной полосы с ненулевыми элементами, необходимо производить нумерацию узлов так, чтобы разность номеров узлов, примыкающих к данному узлу, была наименьшей.



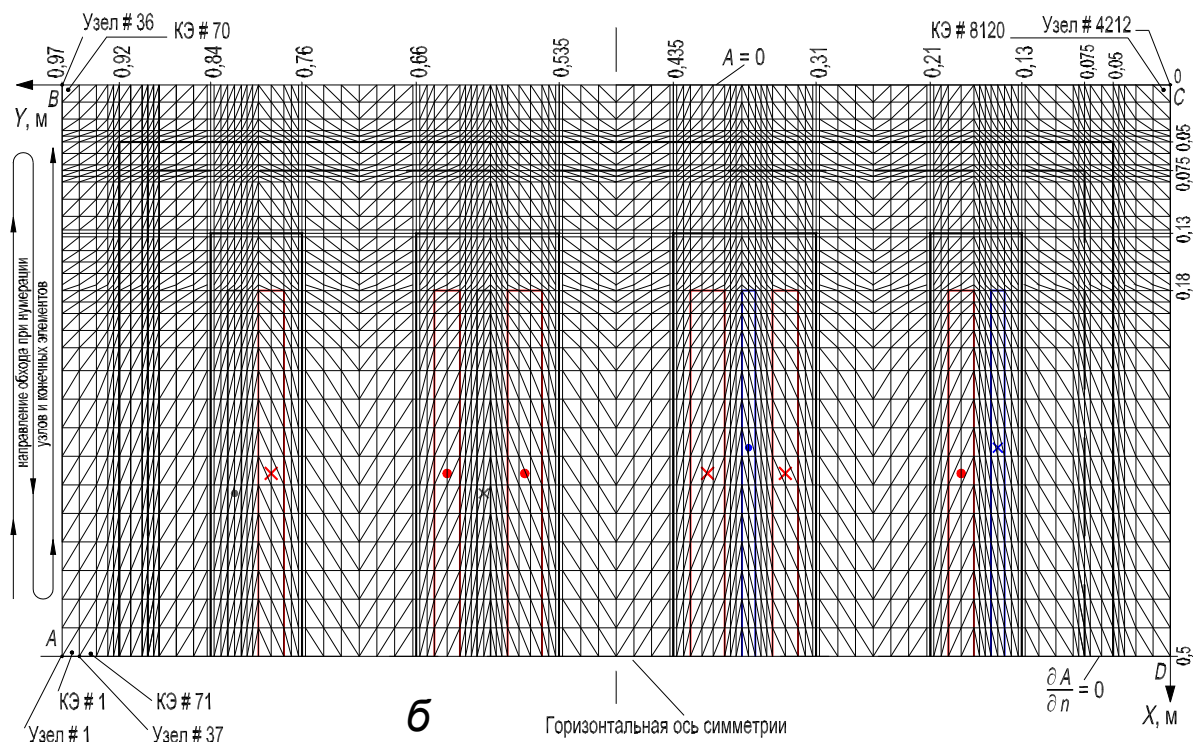
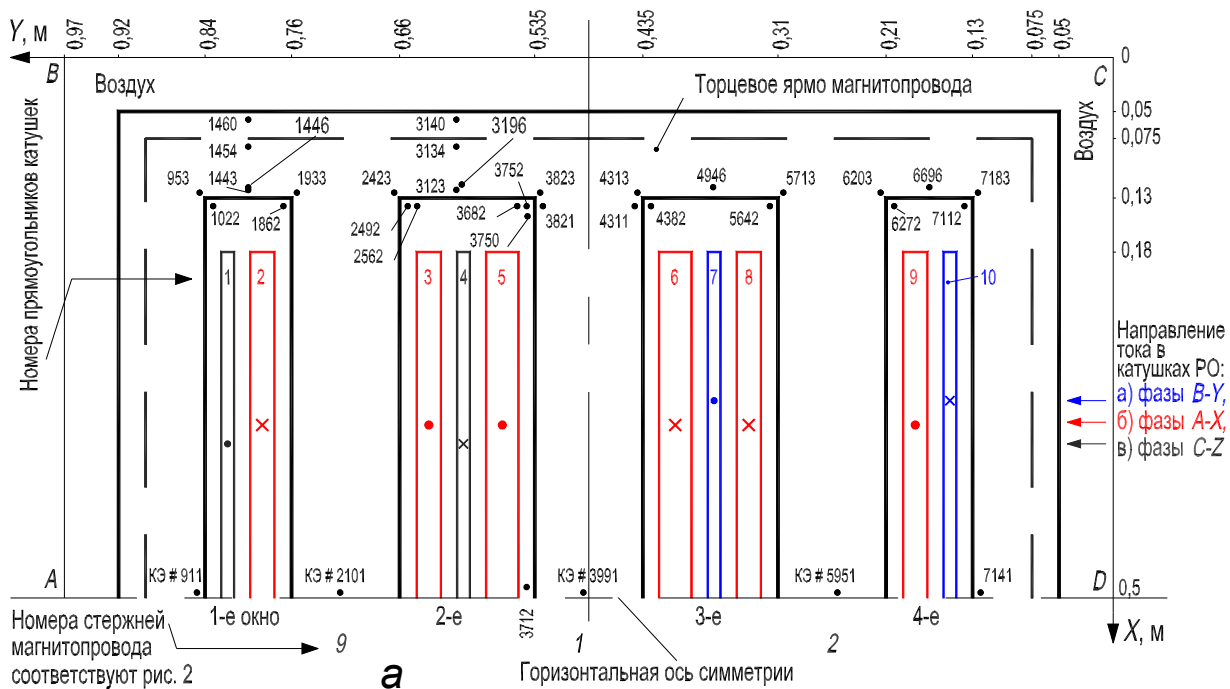


Рис. 3. Область расчета магнитного поля насыщающегося реактора (см. рис. 2)

(символами "#### •" — обозначены номера и положение КЭ (а);

ансамбль конечных элементов, аппроксимирующих область расчета поля

(4212 узлов и 8120 элементов) (б)

Квазистационарное магнитное поле рассчитывалось на 180 временных слоях, соответствующих  $3/2$  периода частоты  $f = 50$  Гц (рис. 4). В качестве начального приближения значений потенциала  $A(x,y)$  для расчета поля на последующем временном слое, принималось распределение потенциала, полученное на предыдущем слое. В результате распределение потенциала на большинстве последующих временных слоев вычислялось с заданной точностью за 2 или 3 итерации, что также обусловило существенное сокращение времени решения задачи.

В исходные данные для расчета магнитного поля входят массивы координат только тех узлов ансамбля КЭ, которые расположены по осям координат. Координаты других, внутренних узлов ансамбля (рис. 3,б) вычислялись программно, что резко сократило объем файла исходных данных и упростило его подготовку. Кроме того, исходными данными являются массивы признаков среды (электротехническая сталь, обмотка с различными мгновенными значениями плотности тока в фазах и др.), точность решения системы НАУ, начальные значения потенциала, коэффициенты кубического сплайна, аппроксимирующего кривую намагничивания электротехнической стали магнитопровода и некоторые другие величины.

Плотность тока  $J$ - в катушках обмотки определялась по мгновенному значению плотности тока с учетом площади прямоугольников, соответствующих на области расчета ABCD этим катушкам:  $J = W_k \sqrt{2} \sin \omega t / S_{пр}$ , где  $\sqrt{2} \sin \omega t$  — мгновенное значение тока  $I$  в катушке, А;  $W_k$  — число витков в катушке;  $S_{пр}$  — поперечное сечение прямоугольника,  $m^2$  (рис. 3 и рис. 4).

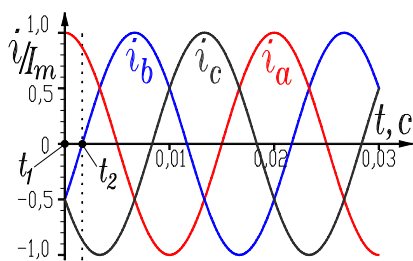


Рис. 4. Токи в фазах обмотки

По распределению потенциала  $A(x,y)$ , найденному в результате решения системы НАУ вида (14), определены картины магнитного поля (силовые линии) в области расчета, значения магнитной индукции, напряженности, относительной магнитной проницаемости в конечных элементах (КЭ) для фиксированного момента времени. Найдено изменение этих величин во времени для заданных конечных элементов. Выполнен гармонический анализ для ряда временных зависимостей. Для удобства анализа и представимости результатов разработан

компьютерный слайд-фильм "Графическая интерпретация результатов расчета магнитного поля в электромеханических устройствах". На основе приведенного ниже анализа результатов расчета поля произведена оптимизация активной части НР.

Магнитная индукция в стержнях магнитопровода (КЭ ## 2101, 3991 и 5951) при плотности тока  $J = 2$  А/мм<sup>2</sup> соответственно равна 2,06, 2,18 и 2,06 Тл. С целью определения ширины пластин боковых и торцевых ярм, которой соответствует магнитная индукция примерно равная (не больше) индукции в стержнях, был выполнен расчет поля при ширине пластин ярм 0,08, 0,07, 0,06 и 0,055 м. Внешний контур магнитопровода, соответствующий размеру 0,055 м на рис. 3,а, показан пунктирной линией, а размеру 0,08 м — сплошной линией. Установлено, что магнитная индукция в наиболее загруженном в магнитном отношении участке торцевого ярма над 2-м окном при размере 0,055 м не больше магнитной индукции в стержнях. Поэтому, поперечное сечение каждого из торцевых и боковых ярм следует принимать равным 0,52—0,55 от сечения стержня, что обуславливает заметную экономию электротехнической стали. Результаты расчетов поля, приводимые ниже, соответствуют ширине пластин ярм 0,055 м.

Наиболее загруженными в магнитном отношении являются углы окон магнитопровода со стороны ярм. При значении магнитной индукции в стержнях  $\approx 2$  Тл индукция и напряженность в этих углах могут достичь весьма больших значений. Это обусловлено тем, что силовые линии поля, стремясь замкнуться

по кратчайшему пути с минимальным магнитным сопротивлением, концентрируются в этих углах. Это видно на рис. 5, на котором показано: пространственное распределение магнитной индукции в области расчета (направление взгляда со стороны горизонтальной оси симметрии (а) и со стороны торцевого ярма (б)); распределение магнитной напряженности (направление взгляда со стороны торцевого ярма (в)) и относительной магнитной проницаемости (направление взгляда со стороны горизонтальной оси симметрии (г)). Конечным элементам 953, 1933, 2423, 3823, 4313, 5713, 6203 и 7183 (рис. 3,а и рис. 5,б,в) соответствуют пиковые, недопустимые по условиям нагрева, значения индукции и напряженности. Для снижения этих значений среда в конечных элементах 1022, 1862, 2492, 3752, 4382, 5642, 6272 и 7112 (они расположены в углах окон; рис. 3,а), была заменена с воздуха на электротехническую сталь. Были выполнены расчеты магнитного поля при различных значениях длин катетов этих КЭ. Данное решение привело к снижению магнитных индукции и напряженности в перегруженных в магнитном отношении участках ярем до приемлемых значений.

Для сопоставления с рис. 5 на рис. 6 показано: пространственное распределение магнитной индукции в области расчета (направление взгляда со стороны горизонтальной оси симметрии (а)); распределение магнитных индукции (б) и напряженности (в) (направление взгляда со стороны торцевого ярма). Поверхности, приведенные на рис. 6, соответствуют заполненным КЭ 1022, 1862, ..., 7112 электротехнической сталью, размер катетов этих элементов  $\approx 1,4$  см. Как следует из сопоставления рис. 5 и рис. 6 пиковые значения индукции и напряженности значительно снижены до приемлемых величин за счет заполнения соответствующих КЭ сталью.

На рис. 7 показаны картины магнитного поля во всей области расчета ABCD (а); в околоярмовом пространстве, в зоне, расположенной слева от бокового ярма (б); в 1-м (в) и 2-м (г) окнах; в околоярмовом пространстве, в зоне, расположенной выше торцевого ярма и слева от вертикальной оси симметрии (д). Данные картины поля построены при заполненных углах окон (КЭ 1022, 1862, ..., 7112) ферромагнитным материалом.

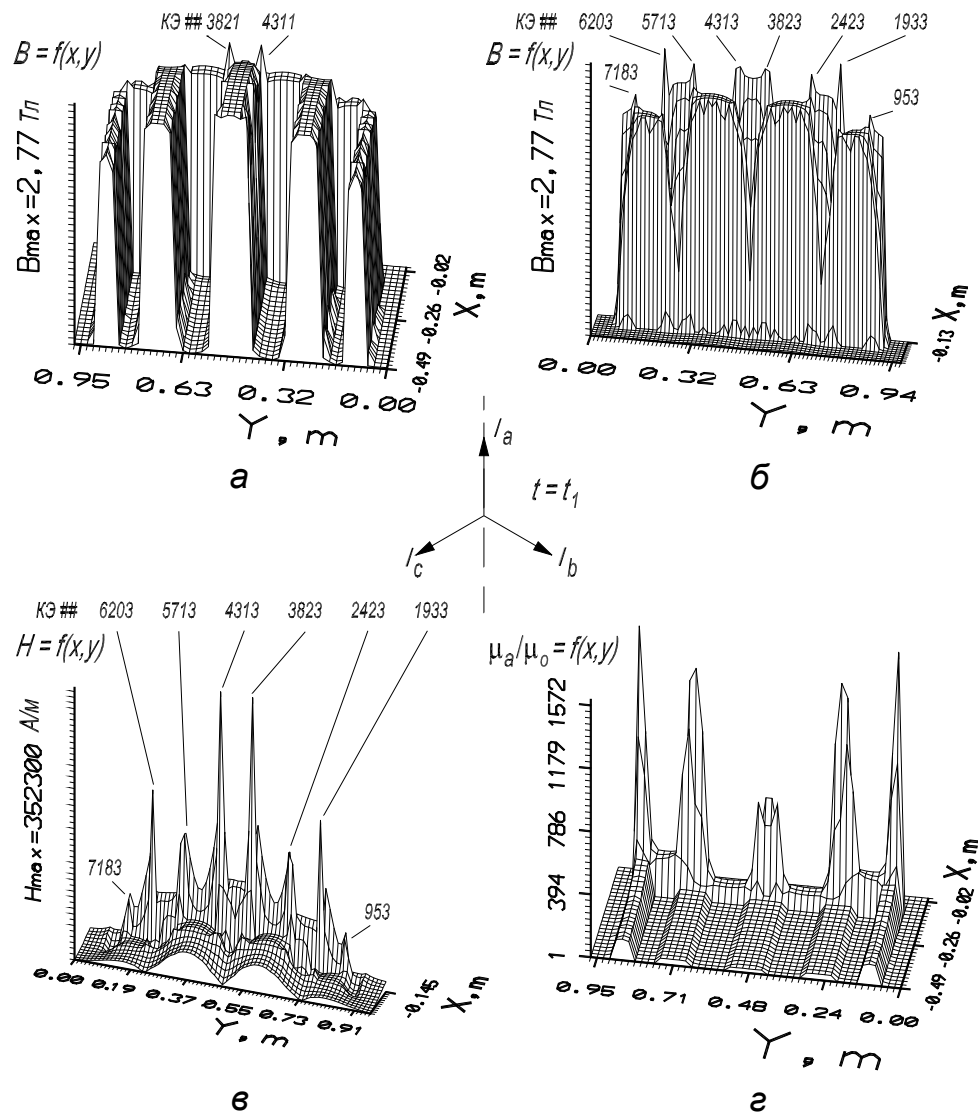
В соответствии со значительным магнитным насыщением стержней в магнитной индукции содержится, наряду с 1-й гармоникой, спектр высших гармоник порядков  $n = 6k \pm 1$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . С целью определения и оценки значений этих амплитуд выполнен расчет квазистационарного магнитного поля в интервале времени  $0 - 0,03$  с, временной шаг  $\Delta t = 0,02$  с / 120. На рис. 8,а показано изменение индукции в стержнях (КЭ ## 2101, 3991, 5951) во времени. Смещение кривых, соответствующих левому (КЭ # 2101) и правому (КЭ # 5951) стержням, относительно кривой, соответствующей среднему стержню (КЭ # 3991), полностью согласуется со звездой векторов МДС стержней магнитопровода НР [1, рис. 3.6].

Выполнен гармонический анализ кривых  $B = f(\omega t)$  для стержней (КЭ ## 2101, 3991, 5951). На рис. 8,б представлены в форме гистограммы значения амплитуд, учитываемых гармоник магнитной индукции, соответствующие КЭ # 3991 среднего стержня. Значения амплитуд 3, 5 и 7-й гармоник используются при расчете потерь в стали магнитопровода реактора.

Таким образом, по данным расчета магнитного поля в НР получены следующие основные результаты: 1) установлено рациональное соотношение сечений ярма и стержня — при примерном равенстве амплитуд 1-х гармоник магнитной индукции в них сечение ярма составляет 0,52—0,55 от сечения стержня, что определяет снижение материалоемкости устройства; 2) предложено и исследовано заполнение углов окон магнитопровода магнитным материалом (полоски из отходов электротехнической стали или магнитная замазка) с целью снятия магнитных перегрузок с соответствующих участков магнитопровода и уменьшения потоков рассеяния в зонах окон, примыкающих к торцевым ярмам. В результате снижаются магнитные потери мощности в стали магнитопровода и в элементах конструкции; 3) определены амплитуды гармоник нечетного

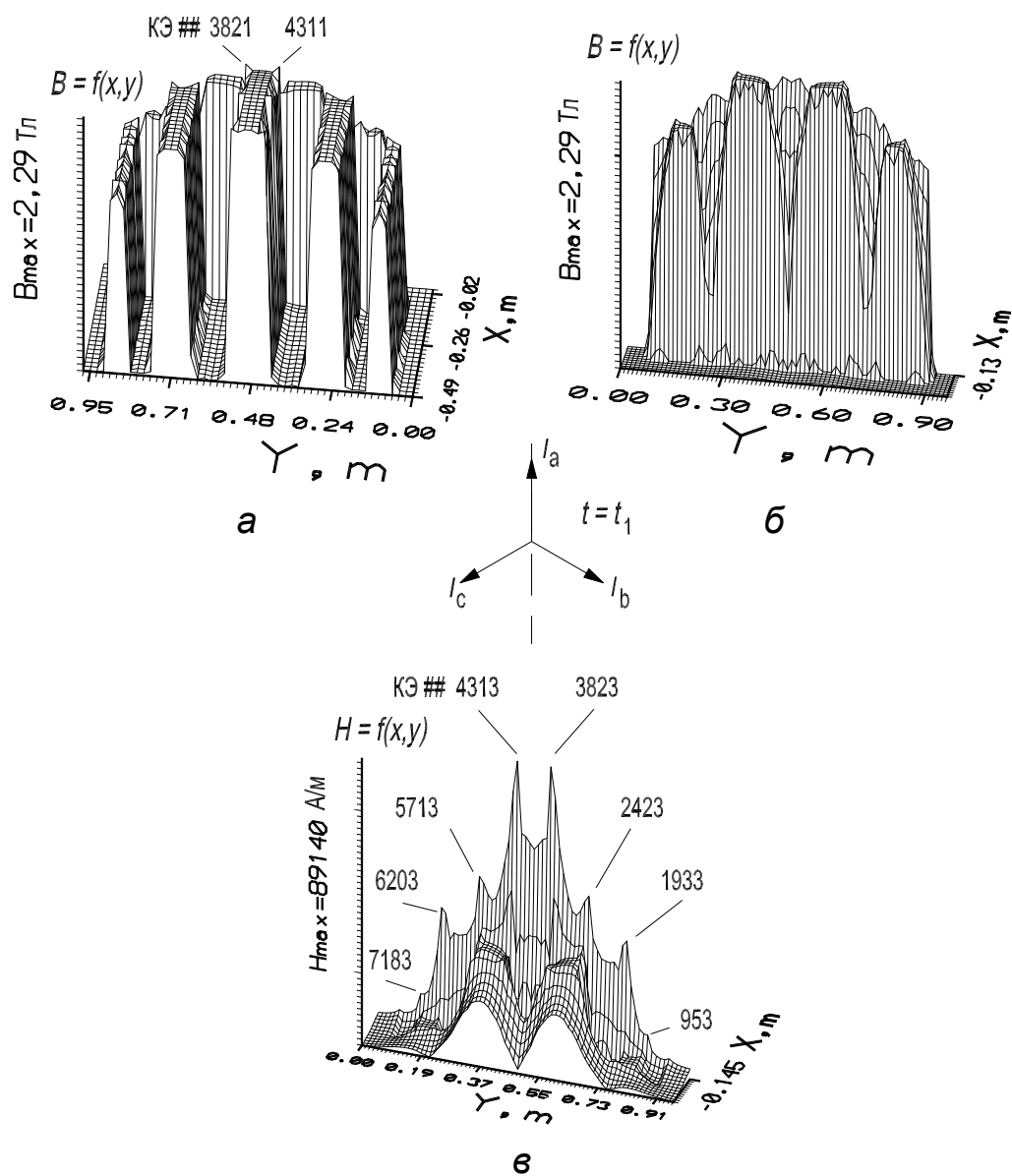
спектра [1, формула (3.2)] магнитной индукции в магнитопроводе; 4) определено распределение магнитной индукции в КЭ ансамбля, аппроксимирующего область расчета, то есть найдены значения индукции как в зоне рассеяния и вытеснения магнитного потока, так и в пределах магнитопровода, которые используются (также как и найденные значения амплитуд гармоник индукции) при проектировании устройства [1].

Вывод о целесообразности заполнения углов окон магнитопровода магнитным материалом является общим, то есть он справедлив не только для рассмотренного НР, но и для других насыщающихся и управляемых реакторов трансформаторного типа с пульсирующим магнитным полем.



**Рис. 5.** Пространственное распределение в области расчета магнитного поля НР: магнитной индукции — направление взгляда со стороны горизонтальной оси симметрии (а) и со стороны торцевого ярма (б); магнитной напряженности — направление взгляда со стороны торцевого ярма (в); относительной магнитной проницаемости — направление взгляда со стороны горизонтальной оси симметрии (г).

Среда в КЭ ## 1022, 1862, 2492, 3752, 4382, 5642, 6272 и 7112 — воздух (см. рис. 3,а)



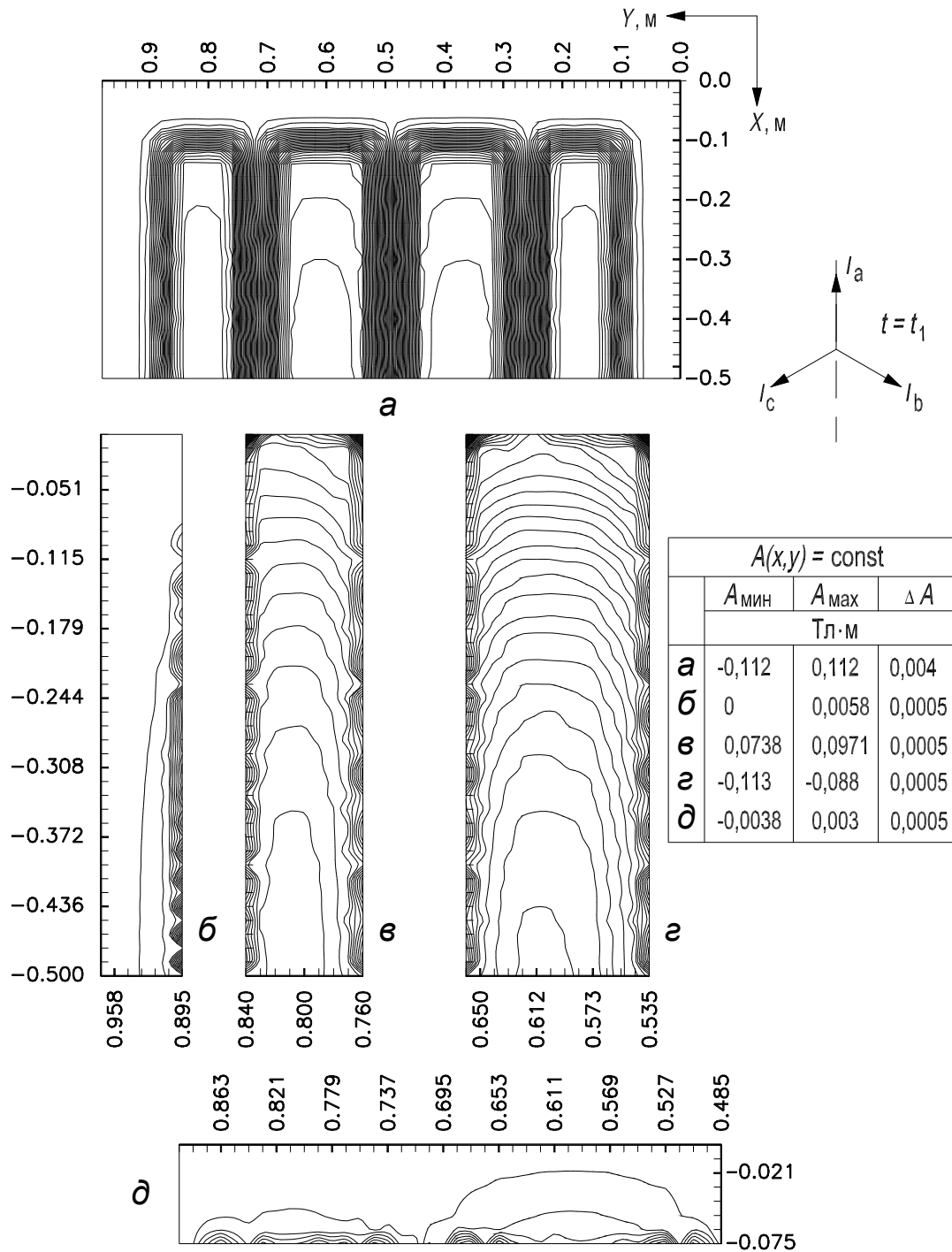
**Рис. 6.** Пространственное распределение в области расчета магнитного поля НР:

магнитной индукции — направление взгляда со стороны горизонтальной

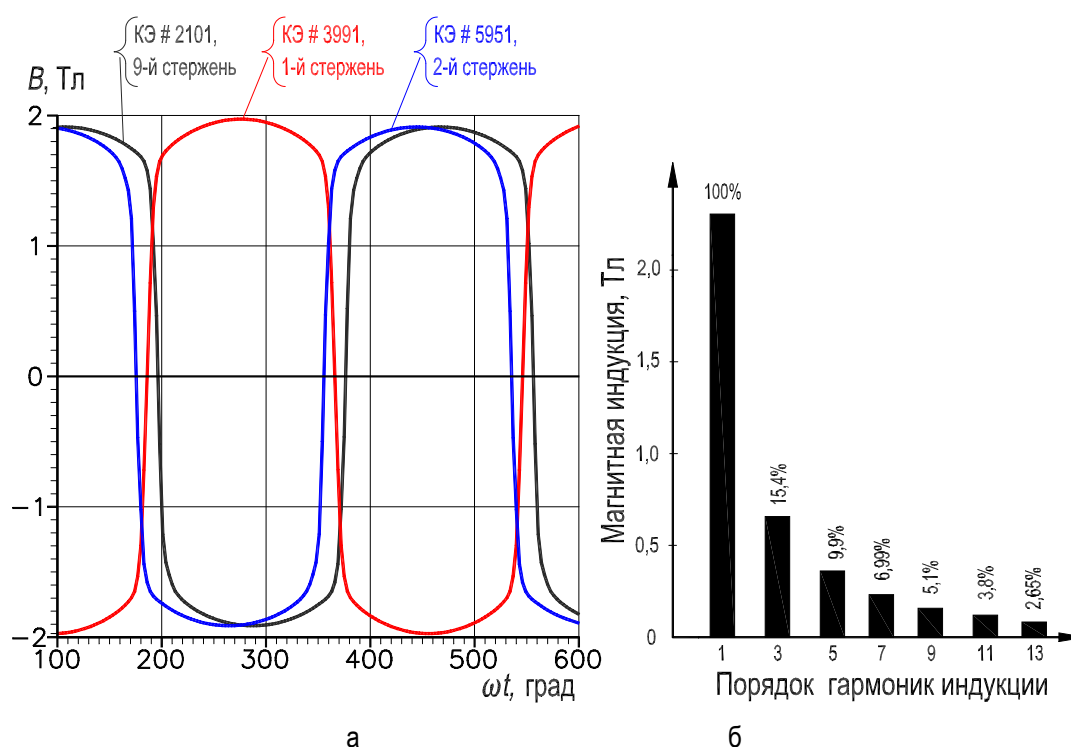
оси симметрии (а) и со стороны торцевого ярма (б);

магнитной напряженности — направление взгляда со стороны торцевого ярма (в).

Среда в КЭ ## 1022, 1862, 2492, 3752, 4382, 5642, 6272 и 7112 — электротехническая сталь



**Рис. 7.** Картины распределения магнитного поля НР (см. рис. 3):  
 во всей области расчета (а), в околярмовом пространстве бокового ярма (б),  
 в 1-м окне (в), во 2-м окне (г), в околярмовом пространстве торцевого ярма (д)



**Рис. 8.** Изменение во времени магнитной индукции в стержнях 1-го модуля НР (а); результаты гармонического анализа магнитной индукции в КЭ # 3991 (см. рис. 3,а) (б)

### 3.2. Управляемый реактор электромашинного типа с вращающимся магнитным полем

Управляемые реакторы этого типа реализуются на основе магнитопровода электрических машин переменного тока общепромышленного назначения. Их отличают такие качества, как компактность и простота конструкции при многофазном исполнении, отсутствие взаимоиндуктивных связей между обмотками и, следовательно, повышенное быстродействие, а также симметричность и синусоидальность рабочего тока во всем диапазоне регулирования. Основы теории реакторов, их назначение и области применения рассмотрены в [1].

Трехфазная рабочая обмотка реактора может быть выполнена на напряжение не большее стандартного напряжения синхронного генератора, поэтому предпочтительнее использовать его в распределительных электросетях и в системах электроснабжения промышленных предприятий, так как в этом случае реактор подключается непосредственно, без промежуточного трансформатора. Реактор используется в качестве регулирующего элемента в схеме статического компенсатора реактивной мощности [1, рис. 1.8,а,б], в схеме параметрического стабилизатора напряжения (рис. 1,а, в этом случае обмотка управления не нужна, и устройство работает в режиме насыщающегося реактора) и др.

Рассчитывается двумерное поле в УР электромашинного типа для двух моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 4), влияние вихревых токов не учитывается, кривая намагничивания магнитопровода принимается однозначной.

Для управляемого реактора электромашинного типа поле является практически плоскопараллельным в пределах магнитопровода как при холостом ходе, так и в рабочем режиме.

Расчет поля выполнен для УР, активная часть которого содержит 2-полюсную пространственно-распределенную РО, две кольцевые обмотки управления (ОУ) и магнитопровод, изготовленный на основе статорных пластин 4-полюсного асинхронного двигателя 14 габарита типа ВАО14-4, ярма магнитопровода не подмагничиваются. Целью расчета является исследование распределения поля в пространстве области расчета и определение на этой основе дифференциальных характеристик.

В силу симметрии область расчета двумерного поля УР включает 1/4 поперечного сечения активной части. Расчетная модель УР (область ABCD на рис. 9) состоит из сердечников статора и ротора, зазора между ними, 3-фазной РО и двух кольцевых ОУ. Кроме того, в область расчета включено немагнитное пространство около ярм статора и ротора. Число зубцов на статоре равно 60, ротор выполнен с таким же количеством зубцов, что способствует предотвращению вибраций неподвижного ротора. Высота ярм статора и ротора принята одинаковой, что удобно для практической реализации предложенного режима симметричного намагничивания УР, который является наилучшим по сравнению с другими режимами намагничивания [1, рис. 3.13, рис. 3.14 и рис. 5.14]. Реактор с этими данными изготовлен по заказу ПО Молдавгидромаш; его назначение — регулирующий элемент в схеме источника питания плазматрона.

Стационарное магнитное поле рассчитывалось для двух моментов времени:  $t_1$  — при этом мгновенные значения тока в рабочей обмотке  $i_a = I_{ам}$ ,  $i_b = i_c = -I_{ам} / 2$ ;  $t_2$  — при этом мгновенные значения тока в этой обмотке  $i_b = 0$ ,  $i_a = -i_c = \sqrt{2}I_{ам}/2$  (рис. 4). Направление тока в катушках фазы РО, обозначенное на рис. 9, а знаком "x", соответствует моменту времени  $t_1$ . Для момента времени  $t_1$  в область расчета включены 5 пазов, соответствующие 1/2 фазной зоны фазы А-Х, и 10 пазов, соответствующие фазной зоне фазы С-З.

Область ABCD непрерывного распределения вращающегося поля аппроксимирована ансамблем из 5554 конечных элементов, который включает 2857 узлов (рис. 9,б). На внешней границе области расчета АВ, ВС, CD, с которой совпадает некоторая силовая линия поля, задано граничное условие Дирихле,  $A = 0$ . На границе DA, совпадающей с осью симметрии, задано однородное условие Неймана, то есть  $\partial A / \partial n = B_\tau = 0$ . С учетом узлов в которых задано условие Дирихле, система НАУ состоит из 2731 уравнения.

Искомым является распределение потенциала  $A(x,y)$  в узлах области расчета. Система НАУ вида (14) решалась методом Ньютона. Система ЛАУ, состоящая из 2731 уравнения, формируемая программно на каждой итерации решения системы НАУ, решалась методом Гаусса, при этом учитывалось, что ширина диагональной полосы матрицы коэффициентов (якобиан) системы ЛАУ, в пределах которой находятся ненулевые элементы якобиана, равна 94. Общее число элементов (нулевых и отличных от нуля) в строке якобиана составляет 2731. Учет соотношения (94 и 2731) обусловил существенное сокращение времени решения задачи. Решение системы НАУ для расчета стационарного магнитного поля, при заданной точности, составило  $\approx 8$  минут и было получено за 10 итераций.

В исходные данные для расчета поля входят массивы координат узлов ансамбля и признаков среды конечных элементов. Узлы ансамбля КЭ располагались на 34-х концентрических (1/4)-окружностях с периодичностью, заданной дискретностью зубцово-пазового слоя. Поэтому координаты большинства узлов, расположенных на каждой концентрической (1/4)-окружности, и массивы признаков среды, расположенных между соседними парами их вычислялись по вспомогательной программе, что существенно упростило формирование файла исходных данных. Кроме того, данными являются точность решения системы НАУ, начальные значения потенциала, плотности тока, массивы коэффициентов кубического сплайна и некоторые другие величины.

Плотности тока в пазах для рабочей трехфазной обмотки рассчитывались с учетом той площади паза на области расчета, которая занята конечными элементами с током.



---

По данным расчета определены: 1) картины распределения магнитного поля во всей области расчета для двух заданных моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , а также в пазах; 2) распределение индукции поля в области расчета; 3) изменение тангенциальной и радиальной составляющих индукции поля в двух сечениях ярма статора, смещенных пространственно на  $90^\circ$ ; 4) изменение этих составляющих индукции вдоль  $1/2$  полюсного деления, соответствующего полюсе КЭ, расположенных на  $1/4$  кольца в пределах ярма статора; 5) изменение радиальной составляющей индукции на протяжении  $1/2$  полюсного деления, соответствующего полюсе КЭ, расположенных на  $1/4$  кольца в пределах зубцово-пазового слоя. Полученные данные используются при проектировании УР.

Далее приводятся результаты расчета поля для момента времени  $t_1$  (рис. 4) и дается их анализ. На рис. 10,а представлено пространственное распределение индукции магнитного поля в области расчета ABCD. Как видно в большей части магнитопровода преобладает насыщение ярм над насыщением зубцов, причем, насыщение ярм статора и ротора практически одинаковы. Последнее объясняется тем, что для удобства реализации режима симметричного намагничивания высота ярм статора и ротора принята одинаковой [1]. На рисунке различимы вдоль части поверхности  $B = f(x,y)$ , соответствующей ярму статора впадины и выступы. Выступы соответствуют участкам ярм над пазами, а впадины — участкам ярм над зубцами. Это объясняется тем, что силовые линии, замыкаясь вдоль ярма, частично изгибаются в зону основания зубцов.

На рис. 10,б показано пространственное распределение магнитной индукции в тех конечных элементах участка ярма статора, 16-го зубца статора, участка воздушного зазора, 16-го зубца ротора и участка ярма ротора, которые расположены вдоль оси X (сторона AD). Как видно из рисунка, в 16-х зубцах статора и ротора, расположенных вдоль оси X, индукция близка к нулю.

На рис. 10,в показано пространственное распределение магнитной индукции в тех конечных элементах участка ярма статора, 1-го зубца статора, участка воздушного зазора, 1-го зубца ротора и участка ярма ротора, которые расположены вдоль оси Y (сторона BC). Как видно из рисунка, в участках ярм статора и ротора, расположенных вдоль оси Y, индукция меньше значений индукции в зубцах, а на внешней поверхности статора и внутренней поверхности ротора значение индукции близко к нулю.

На рис. 11,а представлено изменение модуля радиальной составляющей магнитной индукции на  $1/2$  полюсного деления вдоль полюсы зубцово-пазового слоя, расположенной ближе к коронкам зубцов. Провалы значений индукции соответствуют пазам. Выброс абсолютного значения индукции в 11-м пазу, обусловлен влиянием 3-й гармоники индукции.

На рис. 11,б показана картина магнитного поля в области расчета. Из рисунка видно, что количество силовых линий в 11-м зубце больше, чем в соседних, что согласуется с рис. 11,а.

По результатам расчета магнитного поля в реакторах определяется распределение индукции в магнитопроводе, баке и элементах конструкции. Тем самым, по существу, определено пространственно неравномерное распределение магнитных потерь, которые наряду с электрическими потерями являются источниками температурного поля в реакторах. Поэтому результаты расчета магнитного поля являются исходными для расчета температурного. Аналогия уравнений математической физики, описывающих эти поля, позволяет использовать разработанные программы расчета магнитных полей [1] в качестве основы и для расчета температурных. При этом в уравнениях, реализующих метод КЭ, при записи их в терминах температурного поля, должны быть учтены виды теплопередачи и особенности реализации граничных условий.

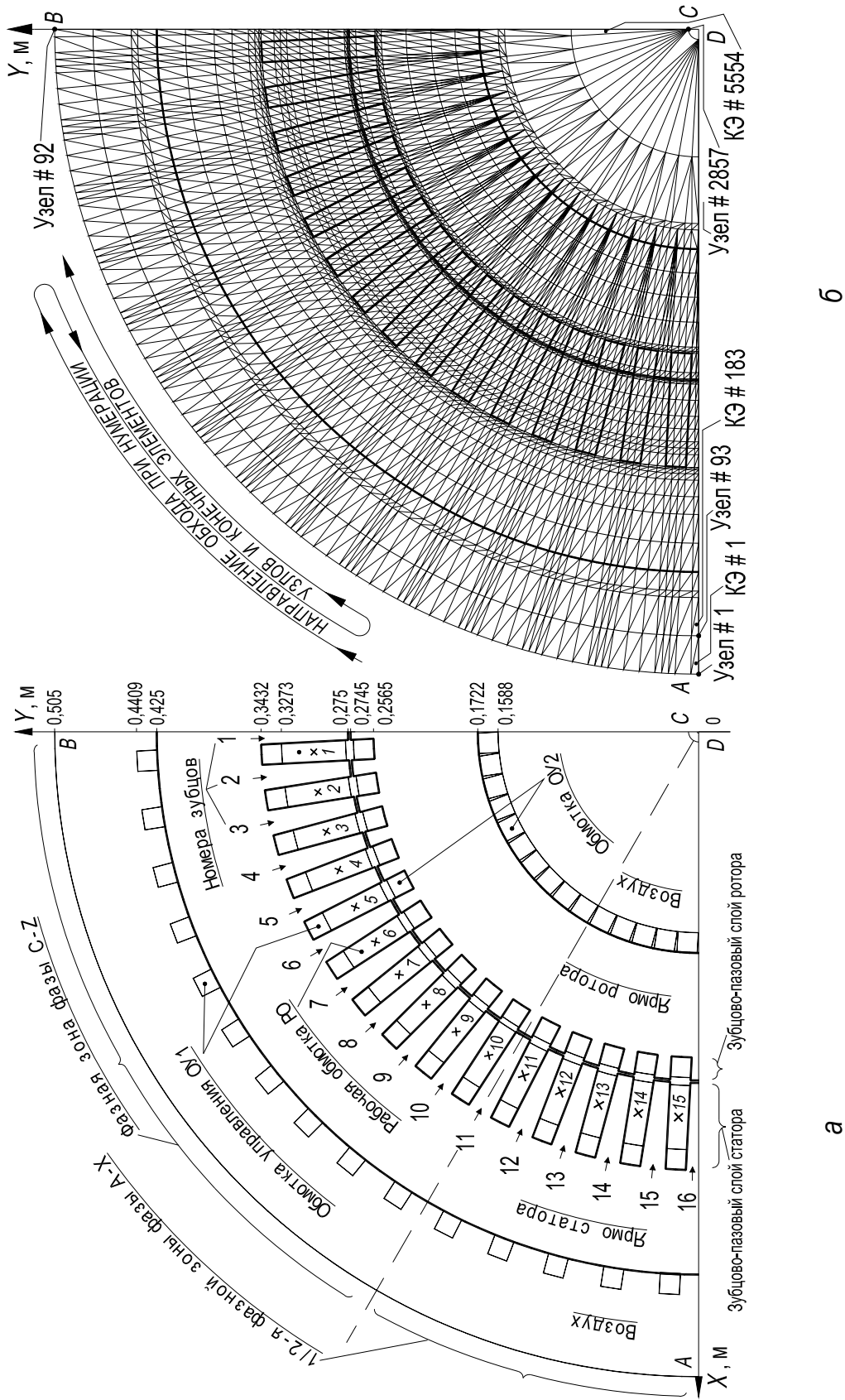


Рис. 9. Область расчета магнитного поля управляемого реактора (а); ансамбль конечных элементов, аппроксимирующих область расчета (2857 узлов и 5554 элементов) (б)

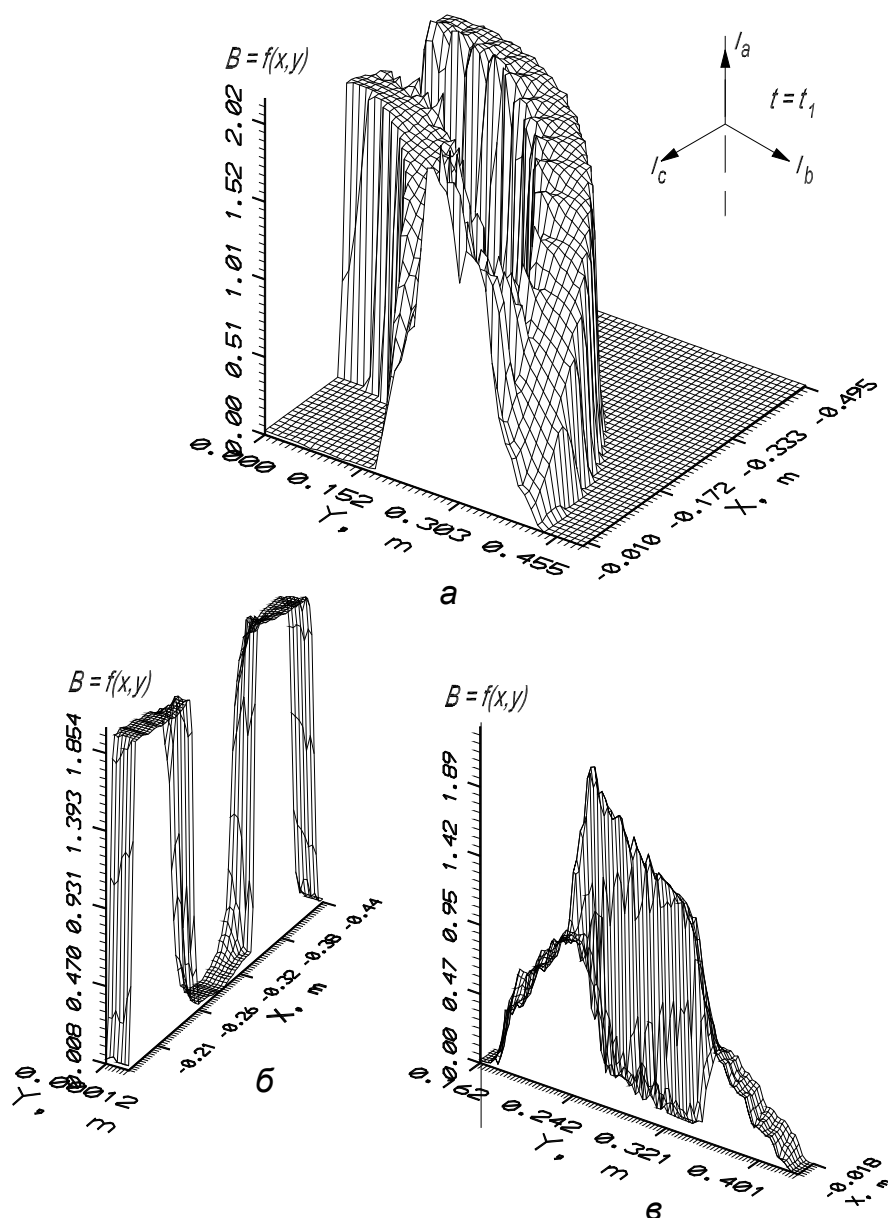


Рис. 10. Пространственное распределение магнитной индукции: во всей области расчета поля управляемого реактора (а) в конечных элементах, расположенных вдоль оси X (б); в конечных элементах, расположенных вдоль оси Y (в)

## Выводы

1. Разработаны на основе максвелловой теории поля и метода конечных элементов обобщенная математическая модель, а также алгоритм и программная реализация модели, которые позволяют исследовать «анатомию» управляемых электроэнергетических устройств и устанавливать взаимосвязи между конструктивными и схмотехническими особенностями устройств и их дифференциальными характеристиками, а также принимать проектные решения, оптимизирующие устройства.
2. Общность математической модели и ее программной реализации определяются тем, что на их основе могут быть исследованы и оптимизированы различные электромагнитные устройства, на внешних границах которых

поля подчиняются условиям Неймана и Дирихле. В модели учтены нелинейность среды и реальные продольная геометрия реакторов трансформаторного типа и поперечная геометрия реакторов электромашинного типа.

3. На основе программной реализации модели оптимизирована конструкция насыщающегося и управляемого реакторов трансформаторного типа с пульсирующим магнитным полем и реактора электромашинного типа с вращающимся магнитным полем.

4. Разработан компьютерный фильм «Графическая интерпретация результатов расчета магнитного поля в электромеханических устройствах», Просмотр фильма позволяет наглядно представить характер пространственно-временного распределения электромагнитного поля в области расчета.

5. Адекватность математической модели определяется в основном принятыми допущениями. Результаты расчета поля, выполненного в управляемых реакторах, согласуются с результатами экспериментальных исследований, а также с рядом расчетных данных, полученных на основе теории электрических и магнитных цепей. Кроме того, корректность разработанной модели и ее программной реализации проверена при выполнении расчетов поля в погружных асинхронных двигателях и в линейных электродвигателях.

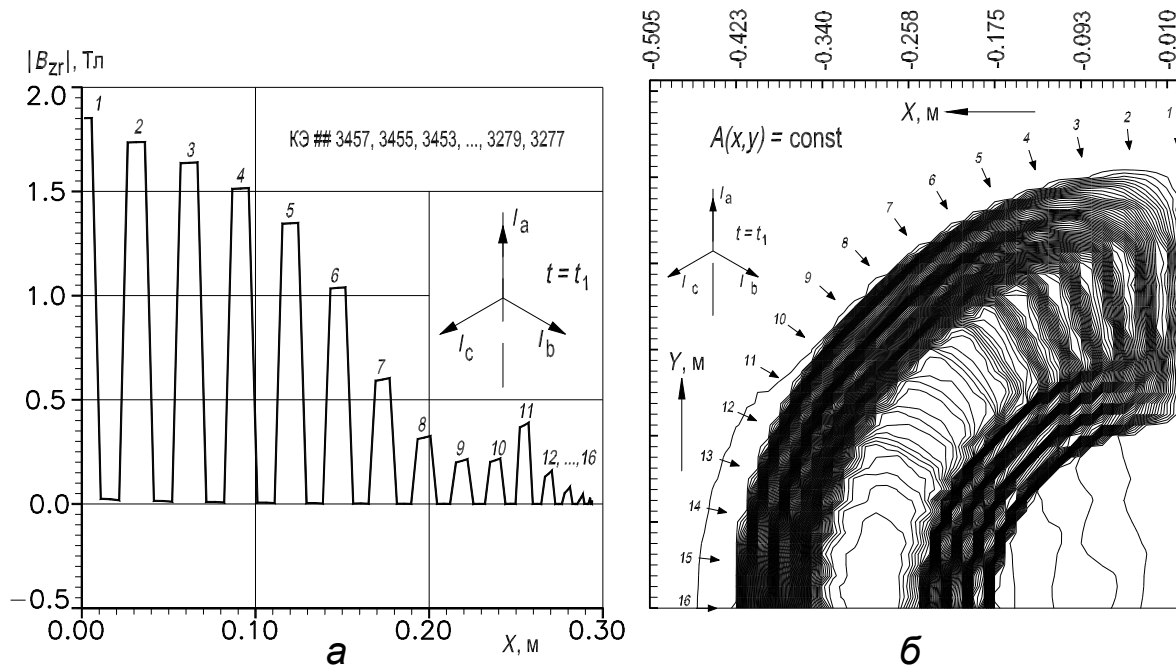


Рис. 11. Изменение модуля радиальной составляющей индукции вдоль зубцово-пазового слоя статора (а); картина магнитного поля УР в области расчета ABCD (см. рис.9) (б);

## Библиография

1. Забудский Е.И. Совмещенные регулируемые электромагнитные реакторы. Москва: Энергоатомиздат, 2003., 436 с.

## Информация об авторе



**Евгений Забудский** — профессор, доктор техн. наук; e-mail: [zei@inbox.ru](mailto:zei@inbox.ru).

Российский университет Дружбы народов, кафедра Кибернетики и мехатроники. 117923, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3.

Направление научной работы — Регулируемые электромагнитные устройства для управления режимами электроэнергетических систем; компьютерные и информационные технологии в образовании; web-сайт: <http://zei.narod.ru>.