МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ЛИНЕЙНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ФИЗИЧЕСКОГО И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО КАПИТАЛОВ

Игорь Ляшенко, Юрий Тадеев

Аннотация: *В работе на основе линейной производственной функции предложена и исследована модель оптимального экономического роста, учитывающая физический капитал, а также интеллектуальный капитал как адитивную часть трудового ресурса. Изучен вопрос существования магистральной траектории и переходной динамики.*

Ключевые слова: *модель экономического роста, линейная производственная функция, инвестирование физического капитала, инвестирование интеллектуального капитала, магистральная траектория, переходная динамика.*

ACM Classification Keywords: *H.1 Models and Principles*

Введение

В современной экономико-математической литературе большое внимание уделяется моделям оптимального экономического роста, которые базируются на экономических производственных функциях и учитывают инвестиции как в физический капитал, так и в интеллектуальный капитал [Barro, 2004]. При этом интеллектуальный капитал понимается в широком смысле – как эндогенный научно-технический прогресс, который мультипликативно влияет на выпуск продукции. Таким образом, интеллектуальный капитал понимается как отдельный (третий) ресурс дополнительно к традиционным ресурсам – физическому капиталу и труду. На этом пути удалось объяснить целый ряд экономических эффектов, наблюдаемых в современной экономической действительности.

В наших работах интеллектуальный капитал интеллектуальный капитал понимается в узком смысле – как дополнительная (интеллектуальная) часть трудовых ресурсов, которая владеет всеми свойствами капитала: инвестируется, амортизируется, морально устаревает и изнашивается. В нашем случае интеллектуальный капитал измеряется в единицах простого труда и количественно может представляться размером заработной платы.

Построение модели

Проанализируем задачу оптимального экономического роста на основе простейшей адитивной двухфакторной производственной функции – линейной производственной функции

$$Y = AK + BH, \quad A = const > 0, \quad B = const > 0 \tag{1}$$

где $Y(t)$ – выпуск продукции, $K(t)$ – физический капитал, $L(t)$ – труд, $H(t)$ – интеллектуальный капитал.

Линейная производственная функция (1) отличается от неоклассической производственной функции, поскольку в ней отсутствует эффект уменьшающей отдачи ресурсов $\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial H^2} = 0\right)$ и не выполняются условия Инады [Inada, 1963], ибо

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial Y}{\partial K}=A,\quad \lim_{H\to 0}\frac{\partial Y}{\partial H}=B;\ \lim_{K\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial K}=A,\quad \lim_{H\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial H}=B,$$

что создаёт определённые трудности при исследовании оптимизационной модели.

Выпуск продукции используется для потребления населения, для инвестирования в физический капитал и для инвестирования в интеллектуальный капитал. Предполагается, что объёмы физического и интеллектуального капиталов амортизируются и выбывают с одним и тем же темпом δ. Такое ограничение, на первый взгляд, является существенным, однако в сбалансированной экономике замена и установка нового оборудования, как правило, связанны с технологическим прогрессом, а освоение этой новой техники требует проведения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ и, соответственно, переобучения трудового персонала. Кстати, во всех классических работах [Barro, 2004] также предполагается, что норма амортизации постоянная и одинаковая как для физического, так и для интеллектуального капитала.

Бюджетное ограничение экономики имеет вид

$$Y=C+I_K+I_H,\quad C\geq 0,\quad I_K\geq 0,\quad I_H\geq 0 \tag{2}$$

где C – потребление населения, I_K и I_H – валовые инвестиции в физический и интеллектуальный капиталы соответственно. Изменения в этих двух капиталах описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{K}&=I_K-\delta K,\quad K(0)=K_0,\\ \dot{H}&=I_H-\delta H,\quad H(0)=H_0.\end{aligned} \tag{3}$$

Население L растет с известным положительным темпом

$$L(t)=L_0e^{nt},\quad n>0.$$

При этом, если ввести нормированную величину $L(0)=1$, то тогда имеем

$$L(t)=e^{nt},\quad n>0 \tag{4}$$

Если $C(t)$ – валовое потребление населения в период t, то $c(t)=\dfrac{C(t)}{L(t)}$ – потребление на одного работника. Каждое домохозяйство желает максимизировать свою полезность, что в конечном итоге приводит к тому, что полная полезность может быть задана в виде

$$U=\int_0^\infty u(c(t))e^{-(\rho-n)t}dt \tag{5}$$

При этом считается, что $u'(c)>0, u''(c)<0$ и удовлетворяются условия Инады [Inada, 1963]: $u'(c)\to\infty$ при $c\to 0$, а также $u'(c)\to 0$ при $c\to\infty$. Дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$ в (5) означает, что полезность уменьшается со временем. Будем считать, что $\rho>n$, откуда следует, что если $u(c)$ ограничена, то интеграл (5) конечен.

Следуя общепринятой практике, в экономических исследованиях используется функция полезности с постоянной межвременной эластичностью замещения [Barro, 2004]:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad \theta > 0 \tag{6}$$

Для дальнейшего удобно перейти к величинам в расчёте на одного работника

$$k = \frac{K}{L}, \quad h = \frac{H}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad c = \frac{C}{L}, \quad i_k = \frac{I_K}{L}, \quad i_h = \frac{I_H}{L}.$$

Тогда производственную функцию (1) можно записать в интенсивной форме

$$y = Ak + Bh \tag{7}$$

Бюджетное ограничение запишется в виде

$$y = c + i_k + i_h, \quad c \ge 0, \quad i_k \ge 0, \quad i_h \ge 0 \tag{8}$$

а дифференциальные уравнения (3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{k} &= i_k - (\delta + n)k, \quad k(0) = k_0, \\ \dot{h} &= i_h - (\delta + n)h, \quad h(0) = h_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Исследование модели

Задачу оптимального управления (5)–(9) будем решать, используя принцип максимума Понтрягина. Для этого построим гамильтониан

$$J = u(c)e^{-(\rho-n)t} + \mu\left(i_k - (\delta+n)k\right) + \nu\left(i_h - (\delta+n)h\right) + \omega\left(Ak + Bh - c - i_k - i_h\right) \tag{10}$$

где μ и ν – теневые цены, связанные с k и h соответственно, ω – множитель Лагранжа, связанный с уравнением (8). Отметим при этом, что условия неотрицательности валовых инвестиций $i_k \ge 0, \quad i_h \ge 0$ мы пока что не учитываем, а ограничение $c \ge 0$ никогда не оказывается связывающим [Barro, 2004].

Необходимые условия оптимальности (условия первого порядка) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c} = 0 \quad &\Rightarrow \quad u'(c)e^{-(\rho-n)t} = \omega, \\ \frac{\partial J}{\partial i_k} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu = \omega, \\ \frac{\partial J}{\partial i_h} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \nu = \omega, \\ \dot{\mu} = -\frac{\partial J}{\partial k} \quad &\Rightarrow \quad \dot{\mu} = \mu(\delta + n) - \omega A, \\ \dot{\nu} = -\frac{\partial J}{\partial h} \quad &\Rightarrow \quad \dot{\nu} = \nu(\delta + n) - \omega B, \end{aligned}$$

а также включают соответствующее условие трансверсальности при $t \to \infty$.

Отсюда получаем $\mu = \nu = \omega$, а также необходимое условие оптимальности

$$A = B \tag{11}$$

С учётом необходимого условия (11) задача оптимального управления (5)–(9) значительно упрощается. Для этого вместо удельных переменных k и h введём новую переменную

$$\hat{k} = k + h \tag{12}$$

которая представляет эффективный капитал в широком смысле [Barro, 2004] и синтезирует в себе физический и интеллектуальный капиталы. Введём также обозначение для суммарного инвестирования

$$i = i_k + i_h \tag{13}$$

Тогда вместо (7), (8) и (9) получаем соответственно

$$y = A\hat{k}, \quad A = const > 0 \tag{14}$$

$$y = c + i, \quad c \geq 0, \quad i \geq 0 \tag{15}$$

$$\dot{\hat{k}} = i - (\delta + n)\hat{k}, \quad \hat{k}(0) = \hat{k}_0 \tag{16}$$

Гамильтониан (10) преобразуется к виду

$$J = u(c)e^{-(\rho - n)t} + \omega\left(A\hat{k} - c - (\delta + n)\hat{k}\right) \tag{17}$$

Отметим, что ограничение неотрицательности $i \geq 0$ мы также пока не учитываем.

Необходимые условия оптимальности для максимума U имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c} = 0 \quad &\Rightarrow \quad u'(c)e^{-(\rho - n)t} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{\partial J}{\partial \hat{k}} \quad &\Rightarrow \quad \dot{\omega} = -\omega(A - \delta - n). \end{aligned} \tag{18}$$

Условие трансверсальности приобретает вид [Barro, 2004]:

$$\lim_{t \to \infty} \omega(t)\hat{k}(t) = 0 .$$

Из (16) и (18) получаем два уравнения

$$\dot{\hat{k}} = (A - \delta - n)\hat{k} - c \tag{19}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{A - \delta - \rho}{\theta} \tag{20}$$

При этом условие трансверсальности [Barro, 2004] принимает вид

$$\lim_{t \to \infty} \hat{k}(t)e^{-(A - \delta - n)t} = 0 \tag{21}$$

Из (20) получаем решение

$$c(t) = c(0)e^{(A - \delta - \rho)\frac{t}{\theta}} \tag{22}$$

Считаем производственную функцию достаточно продуктивной, чтобы гарантировать рост потребления (22), т.е. $A > \rho + \delta$. Вместе с этим также имеем требование сходимости интеграла общей полезности

$$U = \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} e^{-(\rho - n)t} dt ,$$

что в итоге приводит к двум неравенствам

$$A > \rho + \delta > (A - \delta)(1 - \theta) + \theta n + \delta \tag{23}$$

Для того, чтобы найти темп прироста капитала $\hat{k}$ и выпуска на одного работника, перепишем уравнение (19) в виде

$$\frac{c}{\hat{k}} = \left(A - \delta - n\right) - \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}.$$

В стационарном состоянии, в котором по определению все переменные растут с постоянными темпами, темп прироста капитала на одного работника $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$ постоянен.

Найдём темп прироста капитала вне стационарного состояния. Для этого подставим выражение (22) в уравнение (19). Получим

$$\dot{\hat{k}} = \left(A - \delta - n\right)\hat{k} - c\left(0\right)e^{\left(A-\delta-\rho\right)\frac{t}{\theta}}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\hat{k}\left(t\right) = Me^{\left(A-\delta-n\right)t} + \frac{c\left(0\right)}{\varphi}e^{\left(A-\delta-\rho\right)\frac{t}{\theta}} \qquad (24)$$

где M – произвольная постоянная, а

$$\varphi = \left(A - \delta\right)\frac{\theta - 1}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n \qquad (25)$$

По-другому можем записать

$$\varphi = \left(A - \delta - n\right) - \gamma,$$

где, как следует из (20), γ – постоянный темп прироста потребления на одного работника. Из условия (23) следует, что $\varphi > 0$.

Подставим выражение (24) в условие трансверсальности (21). Получим

$$\lim_{t\to\infty}\left[M + \frac{c\left(0\right)}{\varphi}e^{-\varphi t}\right] = 0.$$

Поскольку $c\left(0\right)$ конечно и $\varphi > 0$, то $M = 0$. В этом случае получаем

$$c\left(t\right) = \varphi\hat{k}\left(t\right) \qquad (26)$$

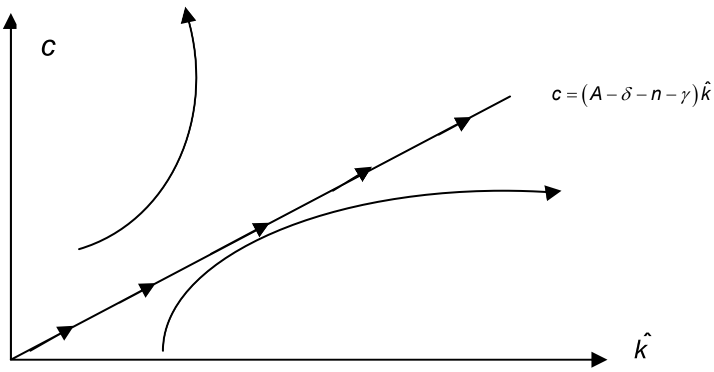
$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(A - \delta - \rho\right) \qquad (27)$$

Учитывая, что $y = A\hat{k}$, получаем

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{c}}{c}.$$

Таким образом, в данной модели нет переходной динамики, ибо переменные $\hat{k}\left(t\right)$, $c\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$, начиная свой путь со значений $\hat{k}\left(0\right)$, $c\left(0\right) = \varphi\hat{k}\left(0\right)$ и $y\left(0\right) = A\hat{k}\left(0\right)$ соответственно, далее все растут с одинаковым темпом.

Мы можем проанализировать динамическое поведение экономики посредством построения фазовой диаграммы в плоскости $\hat{k}$ и c. Заметим, что поскольку $A > \rho + \delta$, прирост потребления всегда положителен. Из уравнения (26) следует, что траектория, по которой движется экономика («седловая траектория»), представляет собой прямую с наклоном φ (рис.). $c=\left(A-\delta-n-\gamma\right)\hat{k}$



Заключение

Таким образом, линейная производственная функция $Y=AK+BH$ может описывать долгосрочный оптимальный рост лишь при условии $A=B$ (равенство уровней технологий физического и интеллектуального капиталов). Если это условие выполнено, то существует единственная траектория, где

$\frac{c}{\hat{k}}=\frac{C}{K+H}=const$, удовлетворяющая всем условиям оптимальности, включая условие трансверсальности. Условие соответствующей пропорциональности должно поддерживаться искусственно, ибо седловая траектория – это единственная траектория устойчивости седловой точки $(0,0)$. Что касается распределения между объёмами физического капитала и интеллектуального капитала, то этот вопрос в принципе может решаться произвольно. Однако при таком распределении существенным остаётся вопрос о равенстве уровней технологий физического капитала A и интеллектуального капитала B.

Библиография

[Barro, 2004] Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. – The MIT Press, Cambridge, London, 2004.

[Inada, 1963] Inada K. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization // Review of Economic Studies. – 1963. – Vol. 30. – №2. – P. 119–127.

Информация об авторах

Игорь Ляшенко *– доктор физико-математических наук, профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская 64, e-mail: lyashenko@univ.kiev.ua*

Сфера научных интересов: математическая экономика, эколого-экономическое моделирование, математическая биология

Юрий Тадеев *– кандидат экономических наук, доцент, докторант, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская 64, e-mail: ytadeyev@gmail.com*

Сфера научных интересов: математическая экономика, моделирование экономического роста