ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЧЁТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Алексей Бычков, Евгений Иванов, Ольга Супрун

Abstract: *В статье разработаны методы нахождения оценки распределения решения для нового класса нечётких дифференциальных уравнений, которые содержат нечёткий процесс в правой части. Приведён пример использования полученных методов.*

Keywords: *нечеткая логика, теория возможностей, нечеткие уравнения, оценка распределения.*

***ACM Classification Keywords**: G.1.7 – Ordinary Differential Equations. J.3 Life and Medical Sciences.*

Введение

Теоретико-вероятностные методы широко и успешно используются в научных исследованиях для моделирования в терминах случайности разных аспектов неопределенности, которая отображает неполноту знаний и их недостоверность.

Вместе с тем вероятностные методы оказались неэффективными при моделировании широкого класса процессов и явлений (социальных систем, субъективных суждений и так далее [Cobb,1981]). Неопределенность (нечеткость) в этих явлениях неадекватно моделируется вероятностными методами, поскольку не наблюдается многоразового повторения событий в одинаковых условиях, в то время как вероятностные модели предназначены для описания событий, которые повторяются многократно. В связи с этим, начиная с 1960-х годов были разработаны разные не вероятностные модели неопределенности и соответствующие теории: субъективная вероятность Северджа, теория возможности Заде и др. В 1974 году М. Сугено ввел понятие возможности события (альтернатива понятию вероятности в невероятностных моделях). После этого разными авторами были созданы варианты теории возможностей [Song, 2000], [Zadeh, 1978], [Бычков, 2007], [Пытьев, 1990]. Следует выделить теорию возможностей, построенную в [Пытьев, 1990], которая в отличие от других, строится по схеме, аналогичной теории вероятности.

В теории возможностей для события вместо вероятности предоставляется относительная оценка возможности ее появления, в шкале возможностей $[0,1]$. На основе числового значения возможности происходит сравнение событий (более возможное, менее возможное, равновозможные). Определенное свойство события считается теоретико-возможностным в случае его инвариантности относительно произвольного преобразования возможностной шкалы, которая хранит порядок на ее элементах. Лишь таким свойствам предоставляется содержательное толкование.

Для практического приложения теории возможностей к моделированию реальных процессов используют нечеткие дифференциальные уравнения. Известные подходы к нечеткому моделированию рассматривают такие уравнения, как дифференциальные уравнения с нечеткими параметрами [Song, 2000], [Zadeh, 1978], [Пытьев, 1990]. Главным недостатком этих подходов является то, что нечеткость моделирует лишь погрешности в вычислении параметров, в то время как для приложений важным является моделирование неопределенности в возмущении правой части уравнения. Из-за этого часто используют стохастические дифференциальные уравнения даже в случаях их неадекватности изучаемому процессу.

В данной работе разработаны конструктивные методы нахождения распределения решения для нового класса нечетких дифференциальных уравнений, лишенных отмеченных выше недостатков, а также приведен пример применения полученных результатов.

Основной результат

Для практического применения важными являются дифференциальные уравнения вида $y' = f(t,y) + g(t,y)\upsilon(t)$, где $\upsilon(t)$ – процесс в котором сосредоточена определенная неопределенность (“шум”). Для случая вероятностной природы неопределенности такие уравнения формализируются как стохастические.

Выполним формализацию и нахождение методов решения такого вида уравнений для случая, когда неопределенность в $\upsilon(t)$ имеет теоретико-возможностную природу, т.е. является нечеткостью.

Приведем определение основных понятий теории возможностей из [Бычков, 2007]. Пусть X – непустое множество (пространство элементарных событий), $\mathbf{A}$ – класс подмножеств X, который содержит $\varnothing$, X. Множества класса $\mathbf{A}$ будут интерпретироваться как (нечеткие) события.

Обозначим $L=[0,1]$ – шкалу возможностей. Ее элементы характеризуют степень возможности события. Для предоставления значения возможности события используется мера возможности.

Определение 1. Мерой возможности на $\mathbf{A}$ называется функция $P:\mathbf{A}\to L$, которая удовлетворяет условию: если $\{A_t \mid t\in T\}$ – семейство множеств из $\mathbf{A}$ таких, что $\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathbf{A}$, то $P(\bigcup_{t\in T} A_t)=\sup_{t\in T} P(A_t)$.

Мера возможности P называется нормируемой, если $P(X)=1,\ P(\varnothing)=0$.

В дальнейшем все меры возможности будут считаться нормируемыми.

Определение 2. P-моделью теории возможностей называется тройка $(X,\mathbf{A},P)$, где P является мерой возможности на $\mathbf{A}$.

В работе [Бычков, 2007] доказано, что мера возможности может быть продолжена с алгебры множеств на булеан пространства элементарных событий, потому без ограничения общности будем рассматривать P-модель теории возможностей вида $(X,2^X,P)$. В этом случае [Бычков, 2007], мера возможности P может быть представлена в виде $P(A)=\sup_{x\in A} f(x)$, для некоторой функции $f:X\to L$.

Введем обозначение $X_\varepsilon=\{x\in X \mid P\{x\}>\varepsilon\}$ – множество элементарных событий, возможность которых превышает заданный уровень ε.

События возможности нуль будем считать невозможным. Все они являются подмножествами дополнения множества X_0.

Запись $P\{E(x)\}$, где E – определенный предикат, будем использовать в качестве сокращения для записи $P\{x\in X \mid E(x)\}$.

Определение 3. Нечеткой величиной (скалярной или векторной) называется функция вида $\xi: X\to \mathbf{R}^n$, для которой $\mathrm{Dom}\,\xi \supseteq X_0$.

Определение 4. Нечеткие величины ξ_i, $i=1,\ldots,n$, называются независимыми в совокупности, если

$$\forall y_1,..y_n : P\{\xi_i=y_i, i=1..n\}=\min_{i=1..n} P\{\xi_i=y_i\}.$$

Определение 5. Нечетким процессом (с непрерывным временем) называется функция вида $p(t,x):\mathbf{T}\times X\to \mathbf{R}^n$, для которой $\mathrm{Dom}\,p\supseteq \mathbf{T}\times X_0$, где $\mathbf{T}=[0,+\infty)$.

Иногда второй аргумент в записи нечеткого процесса опускается.

Нечеткие процессы являются основными для моделирования реальных процессов с точки зрения теории возможностей. Базовым примером нечеткого процесса, который будет использован в данной работе, есть аналог винеровского процесса: процесс нечеткого блуждания [Бычков, 2005]:

Определение 6. Нечеткий процесс (скалярный или векторный) $\mathbf{w}(t,x)$ называется процессом нечеткого блуждания (ПНБ), если:

1. для любых моментов времени $0 \le t_1 < t_2 .. < t_n < t_{n+1}$ нечеткие величины

$\mathbf{w}(t_{i+1}) - \mathbf{w}(t_i)$,

$i = 1,\ldots,n$ независимые в совокупности (независимость приращений);

2. переходная возможность процесса имеет вид:

$$\forall t > t_0 > 0 \, \forall y \in \mathbf{R}^n : P\{\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t_0) = y\} = \varphi\left(\frac{\left\|\Xi^{-1/2} y\right\|^2}{(t-t_0)^2}\right),$$

где (Ξ – положительно определенная матрица, $\varphi : [0,+\infty) \to L$ – убывающая непрерывная функция, такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ и $\varphi(0) = 1$;

3. $\mathbf{w}(0,x) = \mathbf{0}, \forall x \in X_0$.

Функция $\varphi(x)$ из этого определения называется функцией распределения ПНБ.

Скалярный ПНБ в тексте будет обозначаться как $w(t,x)$.

Приведем некоторые свойства ПНБ, которые будут использованы далее.

Теорема 1. Существует P-модель $(X^1, 2^{X^1}, P^1)$ и нечеткий процесс $p(t,x)$ на ней, которые удовлетворяют условиям:

1) события $p(t_i, x)$, $i = 1,..,n$ независимы при $t_i \ne t_j (i \ne j)$ и $P^1\{p(t_i) = y_i\} = \varphi(y_i^2)$, $i = 1,\ldots,n$;

2) $p(t,x)$ – ограниченная измеримая функция для каждого фиксированного $x \in Y_0$ и произвольная ограниченная измеримая функция на $[0,T]$ является траекторией p.

3) $w^1(t,x) = \int_0^t p(\tau,x) d\tau$ является процессом нечеткого блуждания

Доказательство. Пусть X^1 - множество всех ограниченных измеримых функций вида $[0,T]\mapsto \mathbf{R}$ и $P^1(A)=\sup\limits_{x(\cdot)\in A}\varphi(\sup\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|^2), A\subseteq X^1$ - мера возможности на этом множестве.

Докажем, что процесс, определенный как $p(t,x)=x(t)$ является искомым, то есть удовлетворяет свойствам 1-3.

1) $P^1\{p(t_0,x)=y\}=P^1\{x(t_0)=y\}=\varphi(y^2)$.

Покажем независимость. Имеем

$$P^1\{p(t_i,x)=a_i, i=1,\dots,n\}=P^1\{x(t_i)=a_i, i=1,\dots,n\}=$$

$$=\varphi(\max_{i=1..n}(a_i^2))=\min_{i=1..n}\varphi(a_i^2)=\min_{i=1..n}P^1\{x(t_i)=a_i\}=\min_{i=1..n}P^1\{p(t_i,x)=a_i\}.$$

2) Это свойство очевидно.

3) Покажем независимость приращений процесса $w^1(t,x)$:

$$P^1\{w^1(t_{i+1},x)-w^1(t_i,x)=a_i, i=1,\dots,\text{n}\}=P^1\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}x(t)dt=a_i\}=\varphi(k^2),$$

где k является максимальным значением целевого функционала для оптимизационной задачи $\max|x(t)|\to\min$, при условиях $\int_{t_i}^{t_{i+1}}x(t)dt=a_i, i=1,\dots,n$. Поскольку промежутки (t_i,t_{i+1}) непересекающиеся, то решение этой задачи получается склеиванием решений задач $\max|x_i(t)|\to\min$ при условиях $\int_{t_i}^{t_{i+1}}x_i(t)dt=a_i$ и таким образом:

$$x^{opt}(t)=\begin{cases}x_i^{opt}(t), t\in[t_i,t_{i+1}],\\ 0, \qquad t\notin[t_i,t_{i+1}],\end{cases}$$

$$\varphi(k^2)=\min_{i=1,\dots,n}P^1\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}x(t)dt=a_i\}=\min_{i=1,\dots,n}P^1\{w^1(t_{i+1},x)-w^1(t_i,x)=a_i\}.$$

Решением i-ой задачи является функция почти везде константа $a_i/\Delta t_i$, что следует из неравенства

$$|a_i|=\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}x_i(t)dt\right|\le\int_{t_i}^{t_{i+1}}|x_i(t)|dt\le\max|x_i(t)|\Delta t_i.$$

Таким образом, выполняется второе условие из определения ПНБ:

$$P^1\{w^1(t,x)-w^1(t_0,x)=a\}=\varphi(a^2/(t-t_0)^2).$$

Наконец третье условие из определения ПНБ $w^1(0,x)=0$ тоже, очевидно, выполняется. Теорема доказана.

Лемма 1. Если $\mathbf{w}(t,x)$ - ПНБ, то $\forall x\in X_0$ траектория $\mathbf{w}(t,x)$ есть почти везде дифференцируемой.

Доказательство. Рассмотрим цепочку неравенств

$$P\{\|\mathbf{w}(t_1,x)-\mathbf{w}(t_2,x)\|\ge C|t_1-t_2|\}=\sup\{P\{\mathbf{w}(t_1,x)-\mathbf{w}(t_2,x)=\mathbf{a}\}:\|\mathbf{a}\|\ge C|t_1-t_2|\}=$$

$$=\sup\left\{\varphi\left(\frac{\left\|\Xi^{-1/2}a\right\|^2}{(t_1-t_2)^2}\right):\|a\|\ge C|t_1-t_2|\right\}\le\varphi\left(\frac{\lambda_m^2C^2(t_1-t_2)^2}{(t_1-t_2)^2}\right)=\varphi(\lambda_m^2C^2),$$

где λ_m – наименьшее собственное число матрицы $\Xi^{-1/2}$. То есть выполняется

$$P\{\exists t_1\ne t_2:\|\mathbf{w}(t_1,x)-\mathbf{w}(t_2,x)\|\ge C|t_1-t_2|\}\le\varphi(\lambda_m^2C^2).$$

Получили, что имеет место следующее условие Липшица

$$\forall\varepsilon>0\exists C_\varepsilon>0:\forall x\in X_\varepsilon,t_1,t_2:\|\mathbf{w}(t_1,x)-\mathbf{w}(t_2,x)\|<C_\varepsilon|t_1-t_2|.$$

Тогда по теореме Радемахера, $\forall x\in X_0$ функция $\mathbf{w}(t,x)$ является почти везде дифференцируемой. Лемма доказана.

Следствие 1. Функцию $\mathbf{w}'(t,x)$ можно продолжить до нечеткого процесса, равномерно ограниченного на каждом из множеств $R\times X_\varepsilon,\varepsilon>0$, поскольку $\forall x\in X_\varepsilon:\|\mathbf{w}'(t,x)\|\le\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}/\lambda_m$.

Лемма 1 придает содержательный смысл интегралу $\int_0^T f(\tau)w'(\tau,x)d\tau$ от ограниченной на $[0,T]$ измеримой функции f. Если его понимать как интеграл Лебега при каждом $x\in X_0$, то функция $\xi(x)=\int_0^T f(\tau)dw(\tau,x)$ является нечеткой величиной. Аналогично можно придать смысл интегралу по векторному ПНБ:

$$\xi(x)=\int_0^T\mathbf{F}(\tau,x)d\mathbf{w}(\tau,x),\ \mathbf{F}(t)\in\mathbf{R}^{n\times m},\ \mathbf{w}(\tau,x)\in\mathbf{R}^m.$$

Теперь есть возможность строго сформулировать определение уравнения, зависящего от процесса нечеткого блуждания.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение относительно функции $y(t,x)$ вида $[0,T]\times X \to \mathbf{R}$:

$$y(t,x) = y_0 + \int_0^t f\left(\tau, y\left(\tau, x\right)\right) d\tau + \int_0^t g\left(\tau, y\left(\tau, x\right)\right) dw\left(\tau, x\right), \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$, $w(\tau,x)$ – ПНБ, известные функции $f(t,y), g(t,y)$ имеют вид $[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, y_0 – известное значение.

Допустимо, что f и g является ограниченными, измеримыми при каждом значении y и выполняются условия Липшица:

$$\begin{gathered} \exists L > 0 \ \forall t \in [0,T] \ \left|f(t,y_1) - f(t,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|, \\ \left|g(t,y_1) - g(t,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|. \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда $\forall x \in X_\varepsilon$ почти везде на $\left[0,T\right]$ выполняется неравенство:

$$\left|f(t,y_1) - f(t,y_2) + (g(t,y_2) - g(t,y_2))w'(t,x)\right| \le L\left(1 + \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}\right)\left|y_1 - y_2\right|.$$

По теореме Каратеодори о существовании решения для дифференциальных уравнений, для каждого $x \in X_0$ существует единственная абсолютно непрерывная траектория $y(t,x)$, $t \in [0,T]$, которая удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, при указанных условиях, уравнение (1) определяет единственным образом нечеткий процесс $y(t,x)$, который будем называть решением уравнения. Дифференциальная форма записи уравнения (1) имеет вид:

$$dy(t,x) = f(t,y(t,x)) + g(t,y(t,x))dw(t,x).$$

Аналогично дается смысл уравнению с векторным ПНБ

$$\mathbf{y}(t,x)=\mathbf{y}_0+\int_0^t \mathbf{f}(\tau,\mathbf{y}(\tau,x))d\tau+\int_0^t \mathbf{G}(\tau,\mathbf{y}(\tau,x))d\mathbf{w}(\tau,x),\ t\in[0,T]. \quad (3)$$

Важной для приложений характеристикой процесса-решения сформулированного уравнения (1) или (3) есть множество $Y(t,\varepsilon)$ значений решения $y(t)$ в момент t, возможность которых больше заданного порога $\varepsilon>0$, то есть $Y(t,\varepsilon)=\{y:P\{y(t,x)=y\}>\varepsilon\}$.

Заданное параметрическое семейство множеств дает нечеткий аналог распределению решения стохастических дифференциальных уравнений.

Будем искать конструктивный метод оценивания множеств $Y(t,\varepsilon)$ для этого уравнения.

Пусть $w(t,x)$ – скалярный ПНБ. Введем обозначение

$$p(t,x)=\begin{cases} w'(t,x), \text{ если определено и } x\in X_0, \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

$\varphi(x)$ – функция распределения ПНБ $w(t,x)$.

Обозначим через E следующий шар ограниченных измеримых функций вида:

$$[0,T]\to\mathbf{R}:\ E(r)=\{u\in E:\|u\|_\infty<r\}.$$

Определим на E функционал:

$$P[u]=P\{x:p(\cdot,x)\equiv u(\cdot)\}.$$

Лемма 2. Имеют место следующие свойства:

1) $\forall u\in E:P[u]\le\varphi(\|u\|_\infty^2)$;

2) если $0\le t_1<t_2<..<t_{n+1}\le T$, то

$$\sup\left\{P[u]|u\in E:\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}u(\tau)\,d\tau=a_i\Delta t_i, i=1,\ldots,n\right\}=\varphi\left(\max_{i=1,\ldots,n}a_i^2\right).$$

Доказательство. 1) Из леммы 1 следует, что $P\{x\} > \varepsilon \Rightarrow \|p(t,x)\|_\infty \le \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}$, переходя к inf в неравенстве и учитывая непрерывность функции φ^{-1}, получаем $\|p(t,x)\|_\infty \le \sqrt{\varphi^{-1}(P\{x\})}$, откуда $P\{x\} \le \varphi(\|p(t,x)\|_\infty^2)$.

Тогда выполняется неравенство $P[u] = \sup\limits_{x:p(t,x)\equiv u(t)} P\{x\} \le \varphi(\|u\|_\infty^2)$.

2) $P\{w(t_{i+1}) - w(t_i) = a_i\} = \min\limits_{i=1,\dots,n} P\{w(t_{i+1}) - w(t_i) = a_i\} = \min \varphi(a_i^2) = \varphi(\max a_i^2)$.

$$\varphi(\max a_i^2) = P\{\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} p(\tau, x)\,d\tau = a_i \Delta t_i, i = 1,\dots,n\} =$$

$$= \sup\{P\{p(\cdot,x) \equiv u\} \mid u \in E, \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau)\,d\tau = a_i \Delta t_i, i = 1,\dots,n\} =$$

$$= \sup\{P[u] \mid u \in E : \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau)\,d\tau = a_i \Delta t_i, \forall i\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $\varepsilon \in (0,1)$, то для каждой $u^* \in E(\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)})$ существует последовательность $u_n \in E$ такая, что $P[u_n] > \varepsilon$ и $\forall f \in R[0,T]$ $\int\limits_0^t f(\tau) u_n(\tau)\,d\tau \to \int\limits_0^t f(\tau) u^*(\tau)\,d\tau$ равномерно по t на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Выберем произвольную функцию $u^* \in E : \varphi(\|u^*\|_\infty^2) > \varepsilon$.

Положим $\{0 = t_1^n < t_2^n < ..t_{n+1}^n = T\}_{n\ge 1}$ – последовательность разбиений отрезка $[0,T]$ такая, что $\max \Delta t_i^n \to 0, n \to \infty$.

Положим в пункте 2 леммы 2 $t_i = t_i^n$, $a_i = \dfrac{1}{\Delta t_i^n} \int\limits_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u^*(\tau)\,d\tau$ и получим, что

$$\sup\{P[u] \mid \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u(\tau)\,d\tau = \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u^*(\tau)\,d\tau, \forall i\} = \varphi(\max_{i=1..n} \frac{1}{\Delta t_i^n} \left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u^*(\tau)\,d\tau \right|)^2 \geq \varphi(\left\| u^* \right\|_\infty^2) > \varepsilon .$$

Поэтому существует последовательность $u_n \in E$, такая, что $P[u_n] > \varepsilon$ и

$$\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u_n(\tau)\,d\tau = \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u^*(\tau)\,d\tau, i = 1, \ldots, n .$$

Выберем функцию, интегрируемую по Риману на $[0,T]$ и докажем сходимость, которая следует из условия леммы. Обозначим через $\chi_t(\tau)$ – индикатор $[0,t]$.

$$\left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(\tau)\big(u_n(\tau) - u^*(\tau)\big)\,d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(t_i^n)\big(u_n(\tau) - u^*(\tau)\big)\,d\tau \right| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \omega\big(f, \big[t_i^n, t_{i+1}^n\big]\big) \big| u_n(\tau) - u^*(\tau) \big|\,d\tau \leq$$

$$\leq 2\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}\, \omega(f, [t_i^n, t_{i+1}^n]) \Delta t_i^n ,$$

где ω – колебание функции на промежутке.

Тогда

$$\left| \int_0^t f(\tau)\big(u_n(\tau) - u^*(\tau)\big)\,d\tau \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \chi_t(\tau) f(\tau)\big(u_n(\tau) - u^*(\tau)\big)\,d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(\tau)\big(u_n(\tau) - u^*(\tau)\big)\,d\tau \right| + \left| \int_{t_{k(n,i)}^n}^{t_{k(n,i)+1}^n} \chi_t(\tau) f(\tau)\big(u_n(\tau) - u^*(\tau)\big)\,d\tau \right| \leq$$

$$\le 2\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[t_i^n,t_{i+1}^n\right]\right)\Delta t_i^n+\|f\|_\infty\max_{i=1,\dots,n}\left|\Delta t_i^n\right|\to 0\ ,$$

где $k(n,t)$ – номер отрезка, на котором $\chi_t(\tau)$ изменяет значение с 1 на 0. Первое слагаемое стремится к нулю как разница сумм Дарбу для функции f. Сходимость не зависит от t, а потому равномерная. Лемма доказана.

Непосредственно из определения $Y(T,\varepsilon)$ и мер возможности следует равенство $Y(T,\varepsilon)=\{y(T,x)\mid x\in X_\varepsilon\}$ – множество достижимых состояний за время T траекториями процесса - решениями уравнения (1), возможность которых больше ε.

Свяжем с уравнением (1) или (3) уравнение с ограниченным управлением $u(t)$:

$$z(t)=y_0+\int_0^t f\left(\tau,z(\tau)\right)d\tau+\int_0^t g\left(\tau,z(\tau)\right)u(\tau)\,d\tau. \qquad (4)$$

Пусть функции удовлетворяют условия (2) и кроме того, для каждого фиксированного y, функция $g(t,y)$ интегруема по Риману на промежутке $[0,T]$.

Обозначим $U(T,\varepsilon)=\{z(T,u)\mid u\in E(\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)})\}$ – множество достижимости для (4) с начального состояния y_0 с помощью управлений $u(t)$, которые удовлетворяют условию $u\in E(\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)})$.

Заметим, что из леммы 1 следует включение $Y(t,\varepsilon)\subseteq U(t,\varepsilon),\varepsilon\in(0,1)$.

Теорема 2. Для $\varepsilon\in(0,1)$ множество $Y(T,\varepsilon)$ плотно в множестве $U(T,\varepsilon)$.

Доказательство. Пусть точка z^+ достигается во время T с помощью управления $u^*(t)$, причем $\|u^*\|_\infty<\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}$. Соответствующую траекторию обозначим $z^*(t)$.

Пусть $t_s\in\mathbf{R}^+\setminus\bigcup_{q\in Q}D_q$, D_q – множество точек разрыва $g(\cdot,q)$, которое имеет меру нуль в силу предположения об интегрируемости по Риману. Тогда

$$\left|g(t,z^*(t))-g(t_s,z(t_s))\right|\le$$

$$\le\left|g(t,z^*(t))-g(t,q)+g(t,q)-g(t_s,q)+g(t_s,q)-g(t_s,z(t_s))\right|\le$$

$$\le L\left|z^*(t)-q\right|+\left|g(t,q)-g(t_s,q)\right|+L\left|q-z^*(t_s)\right|.$$

Поскольку функция z^* непрерывна, то $\overline{\lim_{t\to t_s}}\left|g(t,z^*(t))-g(t_s,z(t_s))\right|\le 2L\left|q-z^*(t_s)\right|$. В силу произвольности $q\in\mathbf{Q}$, t_s является точкой непрерывности функции $g(t,z^*(t))$. Отсюда следует, что множество точек разрыва $g(t,z^*(t))$ имеет меру нуль и эта (ограниченная) функция является интегруемой по Риману.

Выберем $\delta>0$. По лемме 3, существует $x\in X_\varepsilon$, такое что для $u_0(t)\equiv p(t,x)$ выполняется

$$\left|\int_0^t g\left(\tau,z^*(\tau)\right)\left(u^*(\tau)-u_0(\tau)\right)d\tau\right|<\delta,\, t\in[0,T].$$

Пусть $z_0(t)$ – решение интегрального уравнения

$$z_0(t)=y_0+\int_0^t f\left(\tau,z_0(\tau)\right)d\tau+\int_0^t g\left(\tau,z_0(\tau)\right)u_0(\tau)d\tau.$$

Обозначим $h(t)=z^*(t)-z_0(t)$. Тогда из условий (2) следует неравенство

$$\left|h(t)\right|\le\int_0^t\left|f\left(\tau,z_0(\tau)+h(\tau)\right)-f\left(\tau,z_0(\tau)\right)\right|d\tau+\delta\le\int_0^t Lh(\tau)d\tau+\delta,$$

Откуда $\left|z_0(T)-z^+\right|=\left|h(T)\right|\le\delta\exp(LT)\to 0,\delta\to 0$. Следовательно, множество $Y(T,\varepsilon)$ является плотным в $U(T,\varepsilon)$. Теорема доказана.

Заметим, что для ПНБ $w^1(t,x)$ из теоремы 1 выполняется равенство $Y(T,\varepsilon)=U(T,\varepsilon),\varepsilon\in(0,1)$.

Теоремы 1 и 2 легко обобщаются на случай векторных ПНБ.

Таким образом, для получения практически значимой информации о процессе-решении уравнения, целесообразным является нахождение множества $U(t,\varepsilon)$ вместо $Y(t,\varepsilon)$, что является задачей теории управления.

Множества $U(t,\varepsilon)$ будем называть оценками *ε-среза* решения уравнения.

Поиск $U(t,\varepsilon)$ в одномерном случае может быть осуществлен на основе следующей простой леммы [Cobb,1981]:

Лемма 4. Пусть функция u удовлетворяет условию $\forall t \in [0,T]: |u(t)| < C$, функции $y_1, y_2, y \in C^1[0,T]$ и удовлетворяют таким условиям:

$$y_1' = f(t,y_1) - C|g(t,y_1)|,\ y_1(0) = y_0;$$

$$y_2' = f(t,y_2) + C|g(t,y_2)|,\ y_2(0) = y_0;$$

$$y' = f(t,y) + g(t,y)u(t),\ y(0) = y_0.$$

Тогда $\forall t \in [0,T]: y_1(t) \le y(t) \le y_2(t)$.

Следствие 1. Множество $U(T,\varepsilon)$ для уравнения (1) может быть представлено в виде $\{y \mid y_1(t) < y < y_2(t), t \in [0,T]\}$, где y_1, y_2 – функции из леммы 4, полученные при значении $C = \sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}$.

В многомерном случае для поиска множеств достижимости можно использовать, например, метод динамического программирования Беллмана.

Применение полученных результатов

Эпидемическая модель Росса строится исходя из нижеприведенных предположений [Medlock, 2008]. Популяция состоит из группы риска $S(t)$ и инфицированных индивидов $I(t)$, причем

- размер популяции N большой и постоянный;
- не учитываются выздоровление, отставание; перемешивание равномерное;
- скорость заболевания пропорциональна количеству инфицированных.

Данная модель описывается уравнениями:

$$S(t) = N - I(t),\ \ I'(t) = aI(t)(N - I(t)). \tag{5}$$

Обозначим через $y(t) = I(t)/N$ – часть инфицированных.

Модель (5) может быть уточнена путем учета выздоровления ($b>0$) и передачи заболевания из постороннего источника ($c>0$)[Cobb,1981]:

$$y'(t)=ay(t)(1-y(t))-by(t)+c(1-y(t)). \tag{6}$$

Здесь $a>0$ – скорость передачи заболевания между индивидами.

Внесем в уравнение (6) нечеткую поправку, призванную компенсировать возможную неточность модели (здесь $w(t)$ – ПНБ):

$$y'(t)=ay(1-y)-by+c(1-y)+\sigma(y)w'(t). \tag{7}$$

Сделаем предположение ([Cobb,1981]) о том, что функция $\sigma(y)$ принимает максимальное значение при $y=1/2$ и минимальное значение при $y\in\{0,1\}$. В качестве $\sigma(y)$ можно взять $\delta y(1-y)$, $\delta>0$.

Согласно следствия из леммы 4, для уравнения (7) оценка ε -среза решения является областью расширенной фазовой плоскости

$$\{(t,y):t>0,y_1(t)<y<y_2(t)\},$$

где

$$y_{12}'(t)=y_{12}(1-y_{12})(a\pm\delta\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)})-by_{12}+c(1-y_{12}), \tag{8}$$

Причем начальные условия имеют вид $y_1(0)=y_2(0)=y_0$.

Неотрицательные стационарные решения уравнений (8) при $C_\varepsilon=\sqrt{\varphi^{-1}(\varepsilon)}$ имеют вид:

$$z_1=\frac{a-b-c+\delta C_\varepsilon+\sqrt{\left(a-b+c+\delta C_\varepsilon\right)^2+4bc}}{2\left(a+\delta C_\varepsilon\right)},$$

$$z_2=\frac{a-b-c-\delta C_\varepsilon+\sqrt{\left(a-b+c-\delta C_\varepsilon\right)^2+4bc}}{2\left(a-\delta C_\varepsilon\right)}.$$

Таким образом, можно принять, что часть больных в популяции при больших t, с возможностью большей ε, лежит в промежутке $[z_1(\varepsilon), z_2(\varepsilon)]$ и с меньшей, чем ε, лежит вне этого промежутка.

Пусть $\varphi(x) = \exp(-x)$ $a = 1$, $b = 0.4$, $c = 0.01$, $\delta = 0.1$.

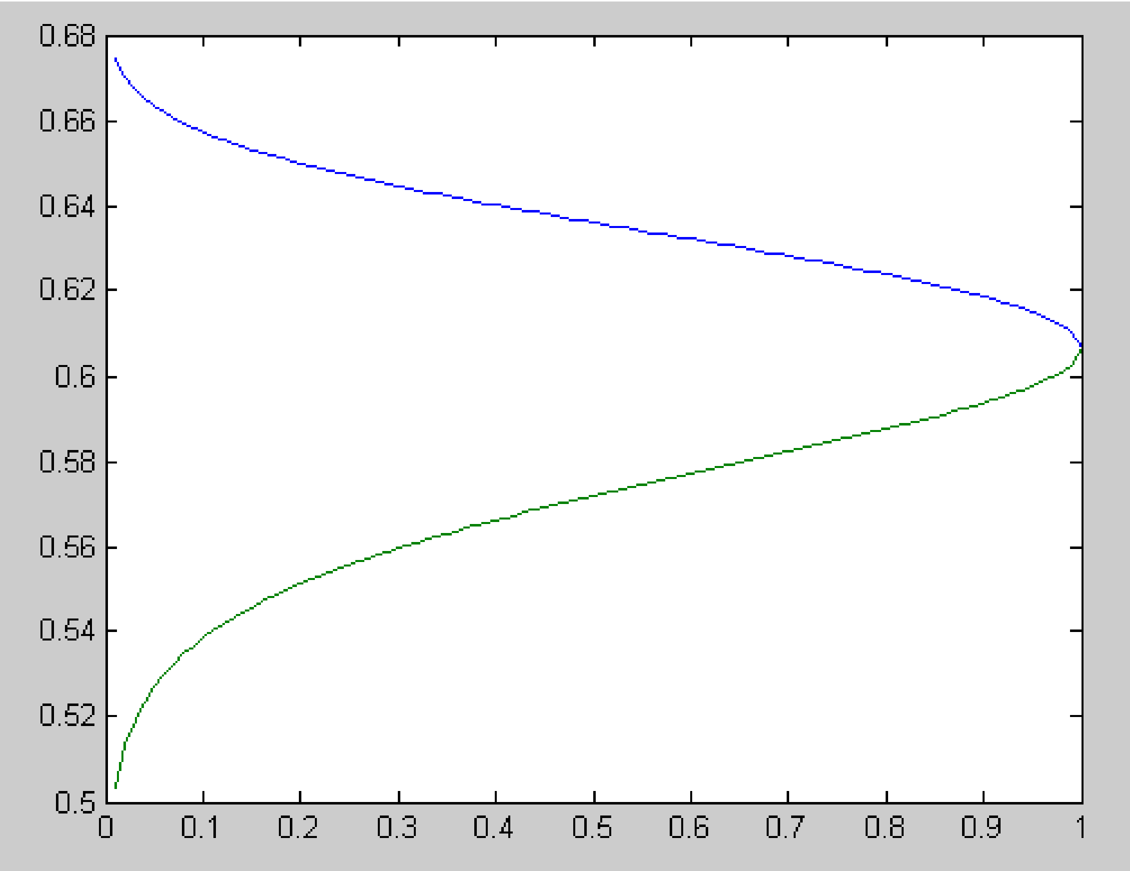

Рис. 1.

На рис. 1 показаны пределы, в которых лежит часть больных с уровнем возможности больше ε (параметр ε на горизонтальной оси, количество больных – на вертикальной).

Заключение

В работе проведена формализация нового класса нечетких дифференциальных уравнений и разработан метод для их решения. Этот метод может стать полезным при моделировании широкого круга реальных процессов и явлений, неопределенность в которых имеет невероятностную природу. Приведен пример приложения приведенной теории к моделированию динамики развития эпидемии.

Литература

[Cobb,1981] L.Cobb. Sochastic differential equations for the social sciences // Mathematical frontiers of social sciences, Westview Press, 1981. - p.37-68.

[Medlock, 2008] J.Medlock. Mathematical Modeling of Epidemics // http://www.amath.washington.edu/~medlock/other/epidemiology_intro_talk.pdf.

[Song, 2000] S.Song, C.Wu. Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem // Fuzzy Sets and Systems, 110, 2000. - p. 55-67.

[Zadeh, 1978] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems, 1978. Vol. 1, pp. 3-28.

[Бычков, 2005] А.С. Бычков. Построение интеграла по процессу нечеткого блуждания // Вестник Киевского университета, Серия: физико-математические науки, 2005. №4, с. 125-133.

[Бычков, 2007] А.С. Бычков, К.С.Колесников. Построение (PN) –модели теории возможностей // Вестник Киевского университета, Серия: физико-математические науки, 2007. №1, с.134-138.

[Пытьев, 1990] Ю.Пытьев. Возможность. Элементы теории и применение. УРСС,1990. -190 С.

Authors' Information

Алексей Бычков *– к.ф.-м.н., заведующий кафедрой программирования и компьютерной техники факультета информационных технологий Киевского национального университета имени Тараса Шевченка; ул. Ломоносова 81А, 03022, Киев, Украина; e-mail: bos.knu@gmail.com*

Основная область научных интересов: исследование гибридных автоматов как моделей непрерывно-дискретных процессов; построение согласованной теории возможностей, нечетких персептивных величин и процессов; математические основы моделирования нечетких сложных систем; применение математических методов в биологии, медицине и экономике

Евгений Иванов *– к.ф.-м.н., ассистент кафедры программирования и компьютерной техники факультета информационных технологий Киевского национального университета имени Тараса Шевченка; ул. Ломоносова 81А, 03022, Киев, Украина; e-mail: ivanov.eugen@gmail.com*

Основная область научных интересов: семантика языков программирования; формальные методы; математическая теория систем; гибридные (дискретно-неперервыеі) системы

Ольга Супрун *– к.ф.-м.н., доцент кафедры программирования и компьютерной техники факультета информационных технологий Киевского национального университета имени Тараса Шевченка; ул. Ломоносова 81А, 03022, Киев, Украина; e-mail: o.n.suprun@gmail.com*

Основная область научных интересов: математическое моделирование и вычислительные методы; нечеткие величины и процессы; гибридные модели непрерывно-дискретных процессов

About estimate of fuzzy differential equations distribution

Alexei Bychkov, Eugene Ivanov, Olha Suprun

Abstract: *In the article the methods of estimation of solution's distribution for a new class of uncertain differential equations which contain a possibilistic process in right part are developed. The example of the use of developed methods is given.*

Keywords: *fuzzy logic, theory of possibility, fuzzy equation, estimate of distribution.*